

第1問

(1)

$f(x) = x^2 + 2mx + m^2 + 2m - 8$ とおくと,

$$f(x) = (x+m)^2 + 2m - 8$$

より, $f(x) = 0$ が異なる 2 つの負の解をもつための条件は,

$$2m - 8 < 0 \quad \text{かつ} \quad -m < 0 \quad \text{かつ} \quad f(0) > 0$$

$$\Leftrightarrow m < 4 \quad \text{かつ} \quad m > 0 \quad \text{かつ} \quad m^2 + 2m - 8 = (m+4)(m-2) > 0$$

$$\Leftrightarrow 2 < m < 4$$

である。

(答) $2 < m < 4$

(2)

数列 $\{a_n\}$ は初項 1, 公比 r の等比数列であるから,

$$a_n = r^{n-1} \quad (n=1, 2, \dots)$$

である。よって, $a_{n+1} = \frac{(a_n)^{\frac{4}{3}}}{\sqrt{b_n}}$ より,

$$\sqrt{b_n} = \frac{(a_n)^{\frac{4}{3}}}{a_{n+1}} = r^{\frac{4}{3}(n-1)} \cdot r^{-n} = r^{\frac{n-4}{3}}$$

$$\therefore b_n = r^{\frac{2n-8}{3}} = r^{-2} \cdot r^{\frac{2(n-1)}{3}}$$

となる。また, $0 < r^{\frac{2}{3}} < 1$ であるから, 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束する。この値を求めると,

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N b_n &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \left\{ r^{-2} \cdot r^{\frac{2(n-1)}{3}} \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} r^{-2} \cdot \frac{1 - r^{\frac{2N}{3}}}{1 - r^{\frac{2}{3}}} \\ &= \frac{1}{r^2 \left(1 - r^{\frac{2}{3}} \right)} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad b_n = r^{-2} \cdot r^{\frac{2(n-1)}{3}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{r^2 \left(1 - r^{\frac{2}{3}} \right)}$$

第2問

(1)

$$y = x - \frac{2}{x} \text{ より,}$$

$$y' = 1 + \frac{2}{x^2}$$

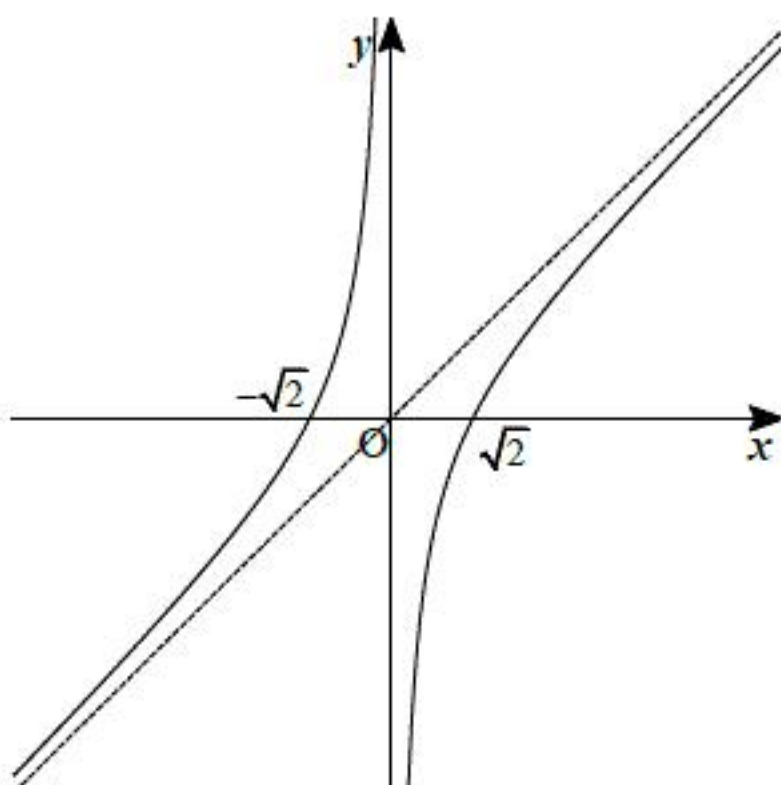
$$y'' = -\frac{4}{x^3}$$

であるから、増減表は次のようになる。

x	...	(0)	...
y'	+		+
y''	+		-
y			

$x \rightarrow \pm\infty$ のとき、 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left\{ \left(x - \frac{2}{x} \right) - x \right\} = 0$ であるから、グラフは直線 $y = x$ に漸近する。また、

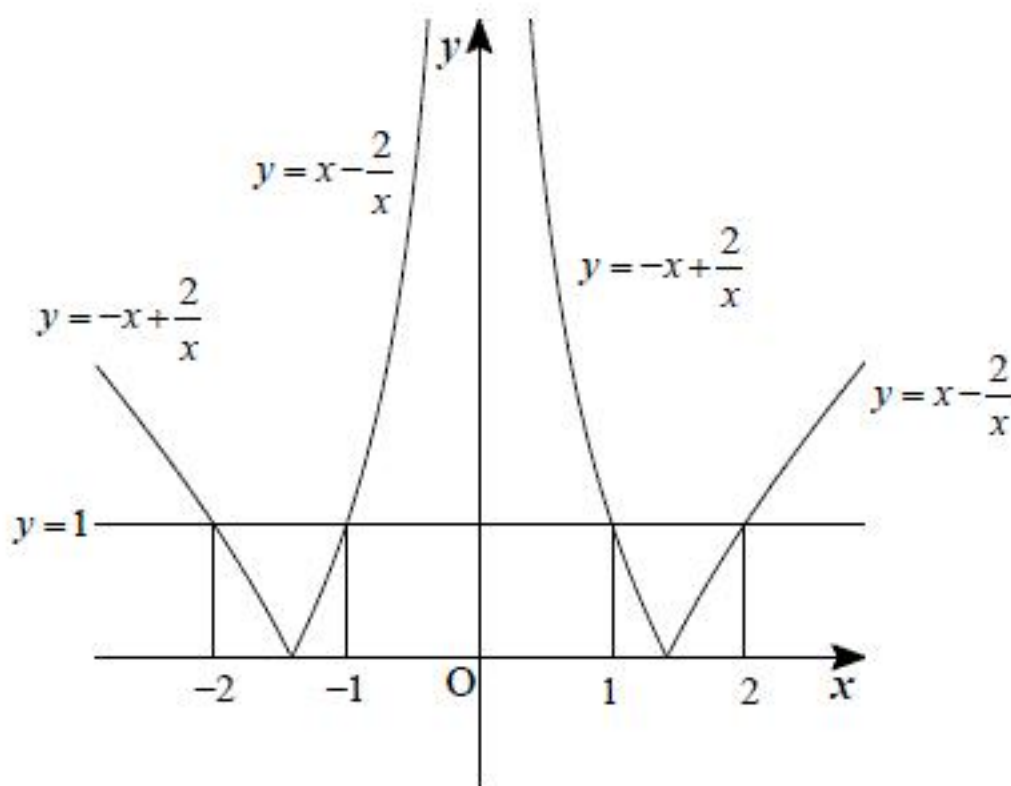
$x \rightarrow \pm 0$ のとき、 $\lim_{x \rightarrow +0} \left(x - \frac{2}{x} \right) = \infty$ 、 $\lim_{x \rightarrow -0} \left(x - \frac{2}{x} \right) = -\infty$ となる。以上より、 $y = x - \frac{2}{x}$ のグラフは次のようになる。



(答) 前図

(2)

(1)の結果より、 $y = \left| x - \frac{2}{x} \right|$ と $y = 1$ のグラフは次のようになる。



ここで、曲線 $y = \left| x - \frac{2}{x} \right|$ と直線 $y = 1$ の交点の x 座標を求めると、

$$x - \frac{2}{x} = 1 \text{ または } -x + \frac{2}{x} = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \text{ または } x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+1) = 0 \text{ または } (x+2)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -2, -1, 1, 2$$

となるから、上図とあわせて考えると

$$\left| x - \frac{2}{x} \right| < 1 \Leftrightarrow -2 < x < -1, 1 < x < 2$$

となる。

(答) $-2 < x < -1, 1 < x < 2$

第3問

(1)

$$\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OC} = s\vec{a} + t\vec{b} - \vec{c}$$

であるから、これが $\vec{a}, \vec{b}$ が垂直となることより、

$$\begin{cases} s + t\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \\ s\vec{a} \cdot \vec{b} + t - \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = s + \frac{2}{3}t \\ \beta = \frac{2}{3}s + t \end{cases}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \alpha = s + \frac{2}{3}t, \beta = \frac{2}{3}s + t$$

(2)

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

より、

$$\overrightarrow{HG} = \left(\frac{1}{3} - s\right)\vec{a} + \left(\frac{1}{3} - t\right)\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

である。ここで、題意より $\overrightarrow{HG} = \frac{1}{3}\vec{c}$ である。 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は 1 次独立であるから、係数を比較すると、

$$s = t = \frac{1}{3}$$

である。したがって、(1)の結果にこれを代入して、

$$\alpha = \frac{5}{9}, \beta = \frac{5}{9}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad \alpha = \frac{5}{9}, \beta = \frac{5}{9}$$

(3)

(2)の結果より、 $\overrightarrow{CH} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c}$ である。したがって、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CH}|^2 &= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + 1 + \frac{2}{9}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a} \cdot \vec{c} - \frac{2}{3}\vec{b} \cdot \vec{c} \\ &= \frac{11}{9} + \frac{4}{27} - \frac{10}{27} - \frac{10}{27} \\ &= \frac{17}{27} \end{aligned}$$

であるから、

$$|\overrightarrow{CH}| = \sqrt{\frac{17}{27}} = \frac{\sqrt{51}}{9}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{51}}{9}$$

第4問

(1)

$$\begin{aligned}\sin^4 x \cos^2 x + \cos^4 x \sin^2 x &= \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= \sin^2 x \cos^2 x \\ &= (\sin x \cos x)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \sin^2 2x\end{aligned}$$

である。

(証明終)

(2)

$x = \frac{\pi}{2} - t$ と変数変換すると、積分範囲は以下のようになる。

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \rightarrow & \frac{\pi}{2} \\ \hline t & \frac{\pi}{2} & \rightarrow & 0 \end{array}$$

このとき、 $\frac{dx}{dt} = -1$ であるから、

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^2 x dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^4 \left(\frac{\pi}{2} - t\right) \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - t\right) (-dt) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \sin^2 t dt\end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(3)

(2), (1)の結果より、

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^2 x dx &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^2 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^2 x dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^2 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \sin^2 x dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 x \cos^2 x + \cos^4 x \sin^2 x) dx \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x dx \right) \\ &= \frac{1}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4x) dx \\ &= \frac{1}{16} \left[x - \frac{1}{4} \sin 4x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{16} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{32}\end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{\pi}{32}$