

第1問

(1)

全ての自然数 n について点 P_n は直線 $x+y=1$ 上に存在することを数学的帰納法により示す。

[1] $n=1$ のとき

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

であるから、 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ より点 P_1 は直線 $x+y=1$ 上に存在する。

[2] $n=k$ のとき点 P_k が直線 $x+y=1$ 上に存在すると仮定する

このとき、点 P_k の座標は $(x_k, 1-x_k)$ とかけるから、

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ 1-x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}x_k + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}x_k + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。したがって、 $x_{k+1} + y_{k+1} = 1$ となるから、点 P_{k+1} も直線 $x+y=1$ 上に存在する。

以上[1], [2]より、題意は示された。

(証明終)

(2)

①より、

$$x_{n+1} = \frac{1}{4}x_n + \frac{1}{2}$$

である。よって、

$$x_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4} \left(x_n - \frac{2}{3} \right)$$

より

$$x_n = \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} \left(x_1 - \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

である。

$$(\text{答}) \quad x_{n+1} = \frac{1}{4}x_n + \frac{1}{2}, \quad x_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

(3)

$x_n + y_n = 1$ であるから、(2)の結果より、

$$\begin{cases} x_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} \\ y_n = 1 - x_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} \end{cases}$$

となる。したがって $n \rightarrow \infty$ とすると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{2}{3}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{1}{3}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

第2問

(1)

第3象限において、 $C_1: y = -x^2$ であるから、 $0 < a < 1$ であることに注意すると、曲線 C_1, C_2 の共有点の x 座標は

$$\begin{aligned} ax^2 + x - a &= -x^2 \\ \Leftrightarrow (a+1)x^2 + x - a &= 0 \\ \Leftrightarrow \{(a+1)x - a\}(x+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = -1, \frac{a}{a+1} \\ \therefore x = -1 \quad (\because x < 0) \end{aligned}$$

となる。よって、求める共有点の座標は $(-1, -1)$ である。

(答) $(-1, -1)$

(2)

$a \cdot 0^2 + 0 - a = -a \neq 0$ より曲線 C_1, C_2 は $x = 0$ で共有点をもたない。(1)の結果より、 $x < 0$ の範囲に共有点が1つ存在することから、曲線 C_1, C_2 が共有点を2つもつためには、 $x > 0$ の範囲にある共有点が1つであればよい。 $x > 0$ において $C_1: y = x^2$ であるから、曲線 C_1, C_2 の共有点の x 座標は

$$\begin{aligned} (a-1)x^2 + x - a &= 0 \\ \Leftrightarrow \{(a-1)x + a\}(x-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 1, \frac{a}{1-a} \end{aligned}$$

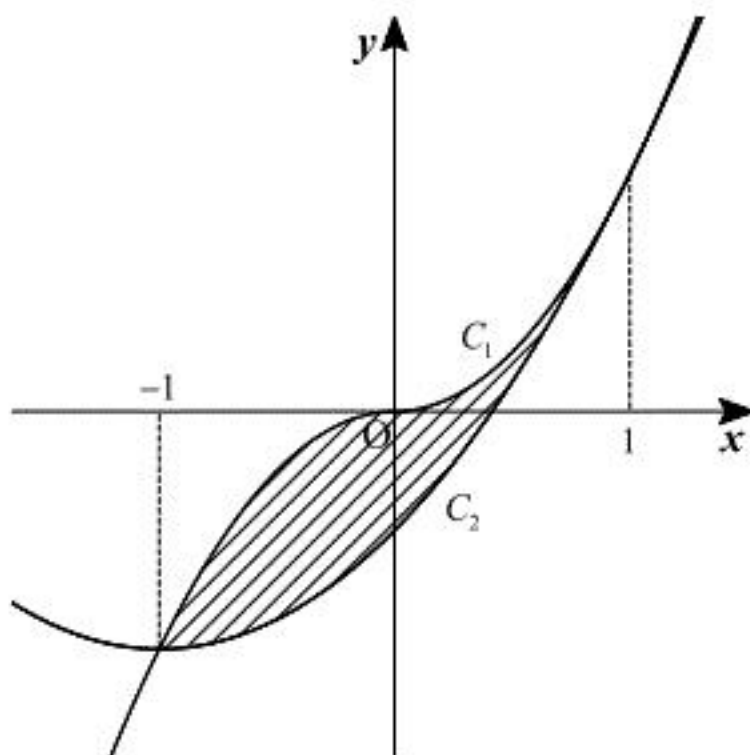
である。よって求める条件は

$$1 = \frac{a}{1-a} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

である。

(答) $\frac{1}{2}$

(3)



求める面積は上図斜線部の面積である。したがって、

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^0 -\{(a+1)x^2 + x - a\} dx + \int_0^1 -\{(a-1)x^2 + x - a\} dx \\ &= \int_{-1}^0 -\left\{\frac{3}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}\right\} dx + \int_0^1 -\left\{-\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}\right\} dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\right]_{-1}^0 - \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\right]_0^1 \\ &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{2}{3}$

第3問

(1)

このとき $a_3 = 5$ であり, a_1, a_2, a_4, a_5 は $1 \sim 4$ のいずれかである。4つの数字から2つ選んでそれらを a_1, a_2 とし, 残り2つの数字を a_4, a_5 とすれば, $a_1 < a_2 < a_3 > a_4 > a_5$ よりカードの並べ方は一意に定まる。よって, カードの並べ方の総数は

$${}_4C_2 = 6 \text{ 通り}$$

である。

(答) 6 通り

(2)

このとき $a_k = n$ であり, $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n$ は $1 \sim n-1$ のいずれかである。 $n-1$ 個の数字から $k-1$ 個選んでそれらを $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ とし, 残り $n-k$ 個の数字を $a_{k+1}, \dots, a_n$ とすれば, 題意の不等式よりカードの並べ方は一意に定まる。よって, $a_k = n$ であるときの並べ方は

$${}_{n-1}C_{k-1} \text{ (通り)}$$

であり, $1 < k < n$ を満たす自然数 k について和を考えれば, 求める並べ方の総数は

$$\sum_{k=2}^{n-1} {}_{n-1}C_{k-1} \text{ (通り)}$$

となる。ここで, 二項定理より

$$(1+1)^{n-1} = {}_{n-1}C_0 + {}_{n-1}C_1 + \dots + {}_{n-1}C_{n-1} = \sum_{k=1}^n {}_{n-1}C_{k-1}$$

となることから,

$$\sum_{k=2}^{n-1} {}_{n-1}C_{k-1} = 2^{n-1} - 2$$

である。よって, 求める並べ方の総数は $2^{n-1} - 2$ 通りである。

(答) $2^{n-1} - 2$

(3)

$a_1 = n, a_p = 1$ より, $a_2, a_3, \dots, a_{p-1}, a_{p+1}, a_{p+2}, \dots, a_n$ は $2 \sim n-1$ のいずれかである。 $n-2$ 個の数字から $p-2$ 個選んで $a_2, a_3, \dots, a_{p-1}$ とし, 残りの $n-p$ 個の数字で最大のものを a_q , その残りの $n-p-1$ 個から $q-p-1$ 個選んで $a_{p+1}, a_{p+2}, \dots, a_{q-1}$ とし, 残りを $a_{q+1}, a_{q+2}, \dots, a_n$ とすれば, 題意の不等式よりカードの並べ方は一意に定まる。よって, カードの並べ方は,

$${}_{n-2}C_{p-2} \cdot {}_{n-p-1}C_{q-p-1} \text{ (通り)}$$

であり, p, q について和を考えれば, 求める並べ方の総数は

$$\sum_{p=2}^{n-2} \sum_{q=p+1}^{n-1} {}_{n-2}C_{p-2} \cdot {}_{n-p-1}C_{q-p-1} = \sum_{p=2}^{n-2} {}_{n-2}C_{p-2} \cdot (2^{n-p-1} - 1)$$

である。ここで, 二項定理により,

$$\begin{aligned} \sum_{p=2}^{n-2} {}_{n-2}C_{p-2} \cdot 2^{n-p-1} &= {}_{n-2}C_0 \cdot 2^{n-3} + {}_{n-2}C_1 \cdot 2^{n-4} + {}_{n-2}C_2 \cdot 2^{n-5} + \dots + {}_{n-2}C_{n-4} \cdot 2^1 \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (2+1)^{n-2} - {}_{n-2}C_{n-3} \cdot 2^1 - {}_{n-2}C_{n-2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} (3^{n-2} - 2n + 3) \end{aligned}$$

$$\sum_{p=2}^{n-2} {}_{n-2}C_{p-2} = (1+1)^{n-2} - (n-2) - 1 = 2^{n-2} - n + 1$$

となるから, 求める並べ方の総数は

$$\frac{1}{2} (3^{n-2} - 2n + 3) - \frac{1}{2} (2^{n-1} - 2n + 2) = \frac{1}{2} (3^{n-2} - 2^{n-1} + 1) \text{ (通り)}$$

である。

(答) $\frac{1}{2} (3^{n-2} - 2^{n-1} + 1)$

第4問

(1)

$$a_n = 5pn, b_n = b_1 + p(n-1)$$

であるから、

$$\sum_{n=1}^p a_n = \frac{5p^2(p+1)}{2}, \sum_{n=1}^p b_n = b_1 p + \frac{p^2(p-1)}{2}$$

となる。ここで、 p は素数であるから $p \neq 0$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^p a_n &= a_1 + a_p + 5 \sum_{n=1}^p b_n \\ \Leftrightarrow \frac{5p^2(p+1)}{2} &= 5p + 5p^2 + 5b_1 p + \frac{5p^2(p-1)}{2} \\ \Leftrightarrow -p &= b_1 p \\ \therefore b_1 &= -1 \quad (\because p \neq 0) \end{aligned}$$

である。

(答) -1

(2)

$p=2$ のとき、

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{10n}{-1+2n-2} = \frac{10n}{2n-3} = 5 + \frac{15}{2n-3}$$

である。これが自然数となるためには、 $2n-3$ が15を割り切ることが必要である。したがって、 $n \geq 1$ のとき $2n-3 \geq -1$ であるから、

$$\begin{aligned} 2n-3 &= -1, 1, 3, 5, 15 \\ \therefore n &= 1, 2, 3, 4, 9 \end{aligned}$$

となるが、 $n=1$ のとき $\frac{a_n}{b_n} = 5-15 < 0$ となるから不適である。したがって、

$$n = 2, 3, 4, 9$$

である。

(答) 2, 3, 4, 9

(3)

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{5pn}{-1+p(n-1)} = 5 + \frac{5(p+1)}{pn-(p+1)}$$

である。 $n=1$ のときは $\frac{a_n}{b_n} = -5p < 0$ となり、 $\frac{a_n}{b_n}$ は自然数にならない。よって $n \geq 2$ が必要である。

ある。このとき $\frac{5(p+1)}{pn-(p+1)} > 0$ であるから、 $\frac{a_n}{b_n}$ が自然数となるための必要十分条件は

$\frac{5(p+1)}{pn-(p+1)}$ が自然数となることである。よって、

$$\begin{aligned} \frac{5(p+1)}{pn-(p+1)} &\geq 1 \\ \Leftrightarrow 5(p+1) &\geq pn-(p+1) \\ \Leftrightarrow \frac{6(p+1)}{p} &\geq n \end{aligned}$$

が必要である。さらに、 $p \geq 3$ より $\frac{6(p+1)}{p} = 6 + \frac{6}{p} \leq 8$ であるから、

$$n \leq 8$$

である。

[1] $n=2$ のとき

$$\frac{5(p+1)}{pn-(p+1)} = \frac{5p+5}{p-1} = 5 + \frac{10}{p-1}$$

より、 $p=3, 11$ のとき自然数となる。

[2] $n=3$ のとき

$$\frac{5(p+1)}{pn-(p+1)} = \frac{5p+5}{2p-1} = 2 + \frac{p+7}{2p-1}$$

より、 $p=3$ のときのみ自然数となる。

[3] $n=4$ のとき

$$\frac{5(p+1)}{pn-(p+1)} = \frac{5p+5}{3p-1} = 1 + \frac{2p+6}{3p-1}$$

より、 $p=7$ のときのみ自然数となる。

[4] $n=5$ のとき

$$\frac{5(p+1)}{pn-(p+1)} = \frac{5p+5}{4p-1} = 1 + \frac{p+6}{4p-1}$$

となるが、 $p \geq 3$ のとき $\frac{p+6}{4p-1} < 1$ となるから不適である。

[5] $n=6$ のとき

$$\frac{5(p+1)}{pn-(p+1)} = \frac{5p+5}{5p-1} = 1 + \frac{6}{5p-1}$$

となるが、 $p \geq 3$ のとき $\frac{6}{5p-1} < 1$ となるから不適である。

[6] $n=7$ のとき

$$\frac{5(p+1)}{pn-(p+1)} = \frac{5p+5}{6p-1}$$

となるが、 $p=3, 5$ のとき自然数とならず、 $p \geq 7$ のとき $\frac{5p+5}{6p-1} < 1$ となるから不適である。

[7] $n=8$ のとき

$$\frac{5(p+1)}{pn-(p+1)} = \frac{5p+5}{7p-1} \text{ より、} p=3 \text{ のときのみ自然数となる。}$$

以上より、求める (p, n) の組は、

$$(p, n) = (3, 2), (3, 3), (3, 8), (7, 4), (11, 2)$$

である。

(答) (3, 2), (3, 3), (3, 8), (7, 4), (11, 2)