

第1問

(1)

$y = x - \frac{2}{x}$ より,

$$y' = 1 + \frac{2}{x^2}$$

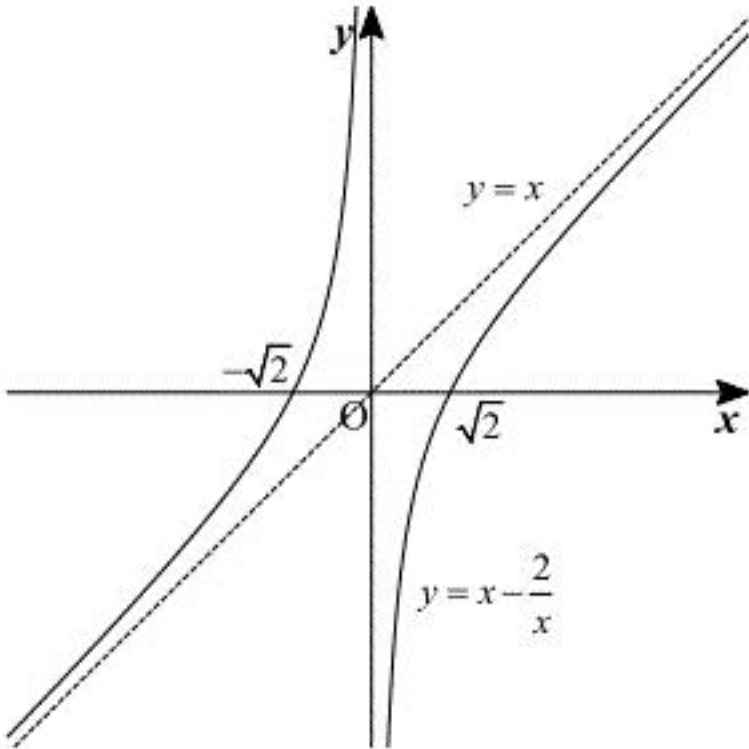
$$y'' = -\frac{4}{x^3}$$

であるから、増減表は次のようになる。

x	...	(0)	...
y'	+		+
y''	+		-
y			

$x \rightarrow \pm\infty$ のとき、 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left\{ \left(x - \frac{2}{x} \right) - x \right\} = 0$ であるから、グラフは直線 $y = x$ に漸近する。また、

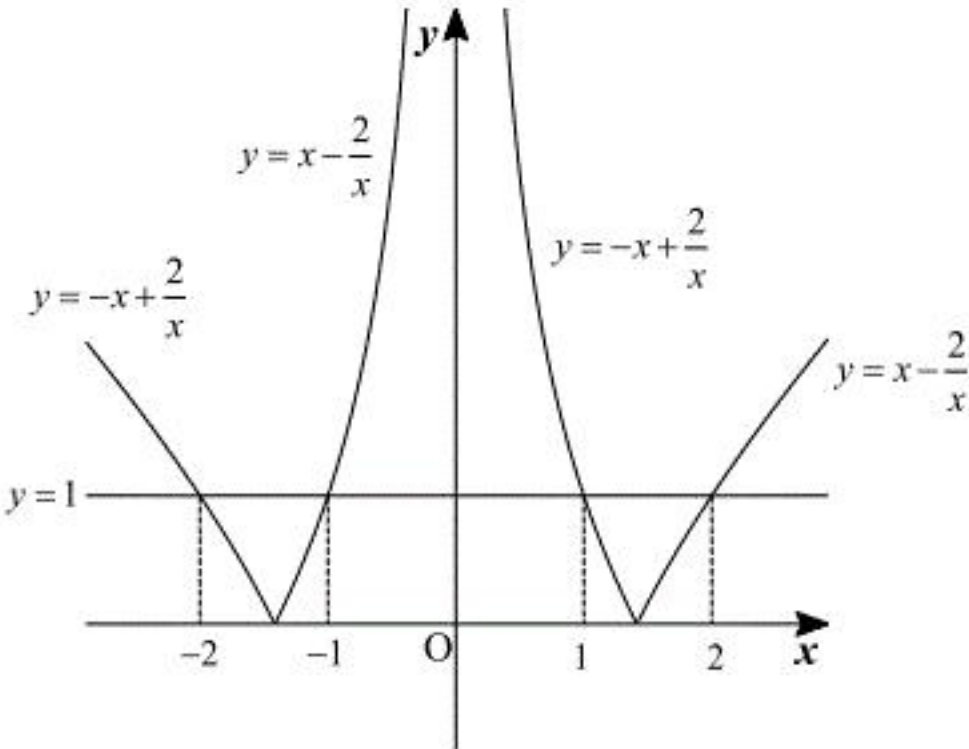
$x \rightarrow \pm 0$ のとき、 $\lim_{x \rightarrow -0} \left(x - \frac{2}{x} \right) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow +0} \left(x - \frac{2}{x} \right) = -\infty$ となる。以上より、 $y = x - \frac{2}{x}$ のグラフは次のようになる。



(答) 前図

(2)

(1)の結果より、 $y = \left| x - \frac{2}{x} \right|$ と $y = 1$ のグラフは次のようになる。



ここで、曲線 $y = \left| x - \frac{2}{x} \right|$ と直線 $y = 1$ の交点の x 座標を求めると、

$$\begin{aligned} x - \frac{2}{x} &= 1 \text{ または } -x + \frac{2}{x} = 1 \\ \Leftrightarrow x^2 - x - 2 &= 0 \text{ または } x^2 + x - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow (x - 2)(x + 1) &= 0 \text{ または } (x + 2)(x - 1) = 0 \\ \therefore x &= -2, -1, 1, 2 \end{aligned}$$

となるから、上図とあわせて考えると

$$\left| x - \frac{2}{x} \right| < 1 \Leftrightarrow -2 < x < -1, 1 < x < 2$$

となる。

(答) $-2 < x < -1, 1 < x < 2$

第2問

(1)

$$\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OC} = s\vec{a} + t\vec{b} - \vec{c}$$

であるから、これが $\vec{a}, \vec{b}$ と垂直となることより、

$$\begin{cases} s + t\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \\ s\vec{a} \cdot \vec{b} + t - \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = s + \frac{2}{3}t \\ \beta = \frac{2}{3}s + t \end{cases}$$

である。

$$(答) \quad \alpha = s + \frac{2}{3}t, \beta = \frac{2}{3}s + t$$

(2)

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

より、

$$\overrightarrow{HG} = \left(\frac{1}{3} - s\right)\vec{a} + \left(\frac{1}{3} - t\right)\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

である。ここで、題意より $\overrightarrow{HG} = \frac{1}{3}\vec{c}$ である。 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は 1 次独立であるから、係数を比較すると、

$$s = t = \frac{1}{3}$$

である。したがって、(1)の結果にこれを代入して、

$$\alpha = \frac{5}{9}, \beta = \frac{5}{9}$$

を得る。

$$(答) \quad \alpha = \frac{5}{9}, \beta = \frac{5}{9}$$

(3)

(2)の結果より、 $\overrightarrow{CH} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c}$ である。したがって、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CH}|^2 &= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + 1 + \frac{2}{9}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a} \cdot \vec{c} - \frac{2}{3}\vec{b} \cdot \vec{c} \\ &= \frac{11}{9} + \frac{4}{27} - \frac{10}{27} - \frac{10}{27} \\ &= \frac{17}{27} \end{aligned}$$

であるから、

$$|\overrightarrow{CH}| = \sqrt{\frac{17}{27}} = \frac{\sqrt{51}}{9}$$

となる。

$$(答) \quad \frac{\sqrt{51}}{9}$$

第3問

(1)

$$\begin{aligned}\sin^4 x \cos^2 x + \cos^4 x \sin^2 x &= \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= \sin^2 x \cos^2 x \\ &= (\sin x \cos x)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \sin^2 2x\end{aligned}$$

である。

(証明終)

(2)

$x = \frac{\pi}{2} - t$ と変数変換すると、積分範囲は以下のようになる。

x	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2}$	$\rightarrow$	0

このとき、 $\frac{dx}{dt} = -1$ であるから、

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^2 x dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^4 \left(\frac{\pi}{2} - t\right) \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - t\right) (-dt) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \sin^2 t dt\end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(3)

(2), (1)の結果より、

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^2 x dx &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^2 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^2 x dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^2 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \sin^2 x dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 x \cos^2 x + \cos^4 x \sin^2 x) dx \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x dx \right) \\ &= \frac{1}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4x) dx \\ &= \frac{1}{16} \left[x - \frac{1}{4} \sin 4x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{16} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{32}\end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{\pi}{32}$

第4問

(1)

$$P_0(1,0), P_1\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \text{より,}$$

$$\ell_1=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2+\left(\frac{2}{3}-0\right)^2}=\frac{5}{6}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{5}{6}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_{n-1}-\frac{2}{3}y_{n-1} \\ \frac{2}{3}x_{n-1}+\frac{1}{2}y_{n-1} \end{pmatrix} \qquad \cdots \textcircled{1}$$

より,

$$\begin{aligned} \ell_n &= \sqrt{\left\{\left(\frac{1}{2}x_{n-1}-\frac{2}{3}y_{n-1}\right)-x_{n-1}\right\}^2+\left\{\left(\frac{2}{3}x_{n-1}+\frac{1}{2}y_{n-1}\right)-y_{n-1}\right\}^2} \\ &= \sqrt{\frac{25}{36}x_{n-1}^2+\frac{25}{36}y_{n-1}^2} \\ &= \frac{5}{6}\sqrt{x_{n-1}^2+y_{n-1}^2} \end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{5}{6}\sqrt{x_{n-1}^2+y_{n-1}^2}$$

(3)

①式より,

$$\begin{aligned} \sqrt{x_n^2+y_n^2} &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}x_{n-1}-\frac{2}{3}y_{n-1}\right)^2+\left(\frac{2}{3}x_{n-1}+\frac{1}{2}y_{n-1}\right)^2} \\ &= \frac{5}{6}\sqrt{x_{n-1}^2+y_{n-1}^2} \end{aligned}$$

となるから,

$$\sqrt{x_{n-1}^2+y_{n-1}^2}=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\sqrt{x_0^2+y_0^2}=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

である。したがって

$$\ell_n=\frac{5}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

であるから,

$$\frac{\ell_{n+1}}{\ell_n}=\frac{5}{6}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{5}{6}$$

(4)

(3)の結果より,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ell_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n=\frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{5}{6}}=5$$

である。

$$\text{(答)} \quad 5$$