

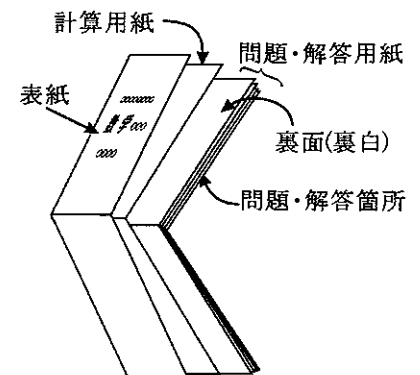
平成26年度入学試験問題

数 学 202

(前 期 日 程)

(注意事項)

- 1 問題・解答用紙および計算用紙は、係員の指示があるまで開かないこと。
- 2 この表紙を除いて、問題・解答用紙は4枚、計算用紙は1枚である。
用紙の折り方は図のようになっているので注意すること。
- 3 解答は、問題と同一の紙面の指定された解答箇所を書くこと。指定された解答箇所以外に書いたものは採点しない。また、裏面に解答したものも採点しない。
- 4 解答開始後、各問題・解答用紙の「受験番号」欄に受験番号をはっきり記入すること。
- 5 計算用紙以外にも、表紙や問題・解答用紙の裏面を計算のために用いてよい。
- 6 表紙、計算用紙を含め、配布した用紙はすべて回収する。



数 学 202 その 1

第 1 問 $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ とし、行列 A で表される 1 次変換を f とする。 f によって点 $P(0, 1)$ が点 $P_1(x_1, y_1)$ に移

されたとする。さらに、 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、点 $P_n(x_n, y_n)$ が f によって点 $P_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$ に移されたとする。

- (1) すべての自然数 n について、点 P_n は直線 $x + y = 1$ 上にあることを証明せよ。
- (2) x_{n+1} を x_n の式で表せ。さらに、数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) n を限りなく大きくするとき、点 P_n が近づいていく点の座標を求めよ。

[第 1 問の解答箇所]

受験番号	第	番
------	---	---

数 学 202 その 2

第2問 $0 < a < 1$ とする。曲線 $y = |x|x$ を C_1 とし、曲線 $y = ax^2 + x - a$ を C_2 とする。

- (1) C_1 と C_2 の共有点のうち、第3象限にある共有点の座標を求めよ。
- (2) C_1 と C_2 の共有点が2個であるとき、 a の値を求めよ。
- (3) a が (2) で求めた値をとるとき、 C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。

[第2問の解答箇所]

小 計	点
-----	---

数 学 202 その 3

第3問 n 枚のカードに1から n までの自然数がひとつずつ書かれている。異なるカードには異なる数が書かれている。

これら n 枚のカードを横一列に並べて、左端から i 番目 ($1 \leq i \leq n$) のカードに書かれた数を a_i とする。

(1) $n = 5$ のとき、 $a_1 < a_2 < a_3$ かつ $a_3 > a_4 > a_5$ を満たすカードの並べ方の総数を求めよ。

(2) $n \geq 3$ とする。次の条件 (i), (ii) を満たすカードの並べ方の総数を n の式で表せ。ただし、(ii) では、 $k = 2$ のとき $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ は $a_1 < a_2$ を表し、 $k = n - 1$ のとき $a_k > a_{k+1} > \cdots > a_n$ は $a_{n-1} > a_n$ を表す。

(i) $1 < k < n$

(ii) $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ かつ $a_k > a_{k+1} > \cdots > a_n$

(3) $n \geq 4$ とする。次の条件 (i), (ii), (iii) を満たすカードの並べ方の総数を n の式で表せ。ただし、(iii) のそれぞれの不等式は (2) と同様に、 $p = 2$ のとき $a_1 > a_2$ を表し、 $q = p + 1$ のとき $a_p < a_{p+1}$ を表し、 $q = n - 1$ のとき $a_{n-1} > a_n$ を表す。

(i) $1 < p < q < n$

(ii) $a_1 = n$ かつ $a_p = 1$

(iii) $a_1 > a_2 > \cdots > a_p$ かつ $a_p < a_{p+1} < \cdots < a_q$ かつ $a_q > a_{q+1} > \cdots > a_n$

[第3問の解答箇所]

受験番号	第	番
------	---	---

数 学 202 その 4

第4問 p を素数とする。初項、公差がともに $5p$ の等差数列を $\{a_n\}$ とする。数列 $\{b_n\}$ は公差が p の等差数列で

$$\sum_{n=1}^p a_n = a_1 + a_p + 5 \sum_{n=1}^p b_n \text{ を満たす。}$$

- (1) b_1 を求めよ。
- (2) $p = 2$ のとき、 $\frac{a_n}{b_n}$ の値が自然数となるような n をすべて求めよ。
- (3) $p \geq 3$ とする。 $\frac{a_n}{b_n}$ の値が自然数となるような p と n の組 (p, n) をすべて求めよ。

[第4問の解答箇所]

小 計	点
-----	---