

第1問

(1)

$$m = \tan \frac{x}{2} \text{ より,}$$

$$\begin{aligned}\frac{2m}{1+m^2} &= \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \\ &= 2 \tan \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2} \\ &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \\ &= \sin x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1-m^2}{1+m^2} &= \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \\ &= \left(1 - \tan^2 \frac{x}{2}\right) \cdot \cos^2 \frac{x}{2} \\ &= \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \\ &= \cos x\end{aligned}$$

である。よって,

$$\sin x = \frac{2m}{1+m^2}, \cos x = \frac{1-m^2}{1+m^2}$$

が成り立つことが示された。

(証明終)

(2)

$-\pi < x < \frac{\pi}{2}$ のとき, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}$ より $m = \tan \frac{x}{2}$ の範囲は

$$\begin{aligned}\tan \frac{x}{2} &< 1 \\ \therefore m &< 1\end{aligned}$$

である。このとき, (1)の結果を用いると,

$$\begin{aligned}\sin x + \cos x - \tan \frac{x}{2} &= \frac{2m}{1+m^2} + \frac{1-m^2}{1+m^2} - m \\ &= \frac{-m^3 - m^2 + m + 1}{1+m^2} \\ &= \frac{-(m+1)(m^2-1)}{1+m^2} \\ &= \frac{-(m+1)^2(m-1)}{1+m^2} \\ &\geq 0 \quad (\because m < 1)\end{aligned}$$

であるから, $-\pi < x < \frac{\pi}{2}$ で

$$\sin x + \cos x \geq \tan \frac{x}{2}$$

が成り立つことが示された。

(証明終)

第2問

(1)

与えられた漸化式より、 $n \geq 3$ において

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \frac{1}{3}(2a_n + 8a_{n-1}) - \frac{1}{3}(2a_{n-1} + 8a_{n-2}) \\ &= \frac{2}{3}a_n + 2a_{n-1} - \frac{8}{3}a_{n-2} \\ &\Leftrightarrow a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}$$

(2)

$$\begin{aligned} a_n &= 6a_{n-1} - 8a_{n-2} \\ &\Leftrightarrow a_n - 2a_{n-1} = 4(a_{n-1} - 2a_{n-2}) \end{aligned}$$

であるから、 $n \geq 3$ において

$$a_n - 2a_{n-1} = 4^{n-2}(a_2 - 2a_1)$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_n - 2a_{n-1} = 4^{n-2}(a_2 - 2a_1)$$

(3)

$a_1 = 1$ のとき、

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{3}(2a_2 + 8a_1) \\ &\Leftrightarrow a_2 + 1 = \frac{2}{3}a_2 + \frac{8}{3} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3}a_2 = \frac{5}{3} \\ &\Leftrightarrow a_2 = 5 \end{aligned}$$

である。よって、(2)の結果より、 $n \geq 3$ で

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + 3 \cdot 4^{n-2} \\ &\Leftrightarrow \frac{a_n}{2^n} = \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} + 3 \cdot \frac{4^{n-2}}{2^n} \\ &\Leftrightarrow \frac{a_n}{2^n} = \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} + 3 \cdot 2^{n-4} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{2^n} &= \frac{a_1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} 3 \cdot 2^{k-3} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1-2^{n-1}}{1-2} \\ &= 3 \cdot 2^{n-3} - \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow a_n = 3 \cdot 2^{2n-3} - 2^{n-2} \end{aligned}$$

である。これは $a_1 = 1$ 、 $a_2 = 5$ も満たすため、一般項 a_n は

$$a_n = 3 \cdot 2^{2n-3} - 2^{n-2} \quad (n \geq 1)$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_n = 3 \cdot 2^{2n-3} - 2^{n-2}$$

第3問

(1)

$$\begin{aligned} |\overline{OA}| &= \sqrt{3^2 + (-3)^2 + 6^2} \\ &= 3\sqrt{6} \\ |\overline{OB}| &= \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{6} \end{aligned}$$

であるから、点Cは線分ABを3:1に内分する点であり、

$$\begin{aligned} \overline{OC} &= \frac{1}{4}\overline{OA} + \frac{3}{4}\overline{OB} \\ &= \frac{1}{4}(3, -3, 6) + \frac{3}{4}(-1, 1, 2) \\ &= (0, 0, 3) \end{aligned}$$

である。

$$\overline{OD} = (s, t, u)$$

とおくと、 $\overline{OA} \perp \overline{CD}$ より

$$\begin{aligned} \overline{OA} \cdot \overline{CD} &= 0 \\ \Leftrightarrow \overline{OA} \cdot (\overline{OD} - \overline{OC}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (3, -3, 6) \cdot (s, t, u-3) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3s - 3t + 6(u-3) &= 0 \\ \Leftrightarrow s - t + 2u &= 6 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となり、 $\overline{OB} \perp \overline{CD}$ より

$$\begin{aligned} \overline{OB} \cdot \overline{CD} &= 0 \\ \Leftrightarrow \overline{OB} \cdot (\overline{OD} - \overline{OC}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (-1, 1, 2) \cdot (s, t, u-3) &= 0 \\ \Leftrightarrow -s + t + 2(u-3) &= 0 \\ \Leftrightarrow -s + t + 2u &= 6 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。したがって、①、②より

$$s = t, u = 3$$

となる。このとき、 $\overline{OD}$ は

$$\overline{OD} = (s, s, 3)$$

と表されることから、

$$\begin{aligned} |\overline{OD}| &= 3\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow |\overline{OD}|^2 &= 27 \\ \Leftrightarrow s^2 + s^2 + 9 &= 27 \\ \Leftrightarrow s^2 &= 9 \\ \Leftrightarrow s &= \pm 3 \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\overline{OD} = (\pm 3, \pm 3, 3) \text{ (複号同順)}$$

である。

(答) $\overline{OC} = (0, 0, 3)$, $\overline{OD} = (\pm 3, \pm 3, 3)$ (複号同順)

(2)

$\overline{OA} \perp \overline{CD}$ および $\overline{OB} \perp \overline{CD}$ より $\triangle OAB \perp \overline{CD}$ であるから、四面体 OABD の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \triangle OAB \cdot CD \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{|\overline{OA}|^2 |\overline{OB}|^2 - (\overline{OA} \cdot \overline{OB})^2} \cdot |\overline{CD}| \end{aligned}$$

と表される。ここで、

$$\begin{aligned} \overline{OA} \cdot \overline{OB} &= (3, -3, 6) \cdot (-1, 1, 2) \\ &= 6 \\ \overline{CD} &= \overline{OD} - \overline{OC} \\ &= (\pm 3, \pm 3, 3) - (0, 0, 3) \\ &= (\pm 3, \pm 3, 0) \end{aligned}$$

$$\therefore |\overline{CD}| = 3\sqrt{2}$$

であることから、

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{(3\sqrt{6})^2 \cdot (\sqrt{6})^2 - 6^2} \cdot 3\sqrt{2} \\ &= \frac{1}{6} \cdot 12\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} \\ &= 12 \end{aligned}$$

である。

(答) 12