

第1問

(1)

題意より

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \cos \angle AOB \\ &= 2 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ \\ &= 1 \\ \vec{c} \cdot \vec{a} &= |\overrightarrow{OC}| |\overrightarrow{OA}| \cos \angle AOC \\ &= 1 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ \\ &= 1\end{aligned}$$

である。また、 $|\overrightarrow{BC}| = \frac{\sqrt{10}}{2}$ より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{BC}|^2 &= \frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow |\vec{c} - \vec{b}|^2 &= \frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow |\vec{c}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{b}|^2 &= \frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow 2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} &= \frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow \vec{b} \cdot \vec{c} &= -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 1, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = -\frac{1}{4}, \quad \vec{c} \cdot \vec{a} = 1$$

(2)

$$\begin{aligned}OB &= OC = 1 \\ \angle AOB &= \angle AOC = 60^\circ\end{aligned}$$

より△OABと△OACは合同であるから、線分BCの中点をMとすると四面体OABCは点O, A, Mを通る平面に関して対称である。平面ABC上の点Hは、対称性より直線AM上にあるため、 $\overrightarrow{OH}$ は実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) + t(\vec{c} - \vec{a}) \\ &= (1 - 2t)\vec{a} + t\vec{b} + t\vec{c}\end{aligned}$$

とかける。 $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ より、

$$\begin{aligned}\{(1 - 2t)\vec{a} + t\vec{b} + t\vec{c}\} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (1 - 2t)\vec{a} \cdot \vec{b} + t|\vec{b}|^2 + t\vec{b} \cdot \vec{c} - (1 - 2t)|\vec{a}|^2 - t\vec{a} \cdot \vec{b} - t\vec{c} \cdot \vec{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow (1 - 2t) + t - \frac{t}{4} - 4(1 - 2t) - t - t &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{19}{4}t - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{12}{19}\end{aligned}$$

であるから、

$$\overrightarrow{OH} = -\frac{5}{19}\vec{a} + \frac{12}{19}\vec{b} + \frac{12}{19}\vec{c}$$

である。

$$(答) \quad \overrightarrow{OH} = -\frac{5}{19}\vec{a} + \frac{12}{19}\vec{b} + \frac{12}{19}\vec{c}$$

(3)

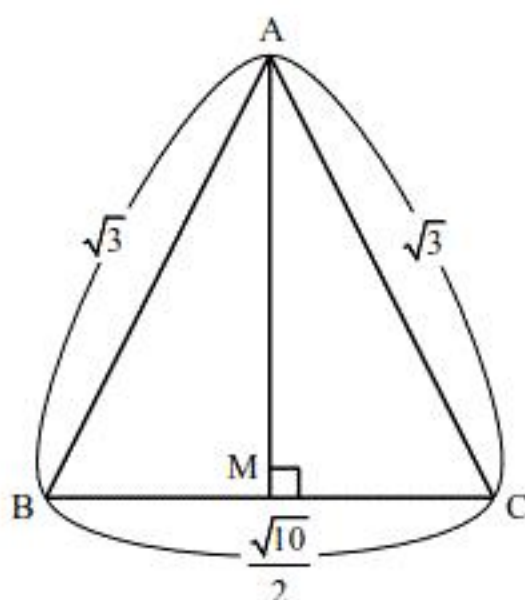
(2)より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OH}| &= \left| -\frac{5}{19}\vec{a} + \frac{12}{19}\vec{b} + \frac{12}{19}\vec{c} \right| \\ &= \frac{1}{19} | -5\vec{a} + 12\vec{b} + 12\vec{c} | \\ &= \frac{1}{19} \sqrt{(-5\vec{a} + 12\vec{b} + 12\vec{c})^2} \\ &= \frac{1}{19} \sqrt{25|\vec{a}|^2 + 144|\vec{b}|^2 + 144|\vec{c}|^2 - 120\vec{a} \cdot \vec{b} + 288\vec{b} \cdot \vec{c} - 120\vec{c} \cdot \vec{a}} \\ &= \frac{1}{19} \sqrt{25 \cdot 4 + 144 + 144 - 120 - 120 - \frac{288}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{76}}{19} \\ &= \frac{2\sqrt{19}}{19}\end{aligned}$$

である。また、

$$AB = \sqrt{3}, \quad AC = \sqrt{3}, \quad BC = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

であるから、△ABCは下図のようになる。



上図より、

$$\begin{aligned}AM &= \sqrt{(\sqrt{3})^2 - \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{38}}{4}\end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}\triangle ABC &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot \frac{\sqrt{38}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{95}}{8}\end{aligned}$$

であるから、求める体積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} \cdot \triangle ABC \cdot OH &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{95}}{8} \cdot \frac{2\sqrt{19}}{19} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{12}\end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad \frac{\sqrt{5}}{12}$$

第2問

(1)

$$\int \{ax - x \log(x+1)\} dx = \int \{ax - (x+1) \log(x+1) + \log(x+1)\} dx$$

であるから、 C を積分定数とすると

$$\begin{aligned} \int (x+1) \log(x+1) dx &= \frac{1}{2} (x+1)^2 \log(x+1) - \int \frac{1}{2} (x+1) dx \\ &= \frac{1}{2} (x+1)^2 \log(x+1) - \frac{1}{4} (x+1)^2 + C \\ \int \log(x+1) dx &= (x+1) \log(x+1) - \int dx \\ &= (x+1) \log(x+1) - x + C \end{aligned}$$

なることより

$$\begin{aligned} &\int \{ax - (x+1) \log(x+1) + \log(x+1)\} dx \\ &= \frac{1}{2} ax^2 - \left\{ \frac{1}{2} (x+1)^2 \log(x+1) - \frac{1}{4} (x+1)^2 \right\} + \{(x+1) \log(x+1) - x\} + C \\ &= \frac{2a+1}{4} x^2 - \frac{x}{2} - \frac{x^2-1}{2} \log(x+1) + C \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{2a+1}{4} x^2 - \frac{x}{2} - \frac{x^2-1}{2} \log(x+1) + C$

(2)

真数条件より $x > -1$ であり、この条件の下で

$$\begin{aligned} ax - x \log(x+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x \{a - \log(x+1)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 0, e^a - 1 \quad (\because x > -1) \end{aligned}$$

である。 $a > 0$ より $e^a - 1 > 0$ であるから、求める x は、

$$x = 0, e^a - 1$$

である。

(答) $0, e^a - 1$

(3)

$$\begin{aligned} ax - x \log(x+1) &> 0 \\ \Leftrightarrow x \{a - \log(x+1)\} &> 0 \\ \Leftrightarrow 0 < x < e^a - 1 \end{aligned}$$

であるから、

[1] $1 > e^a - 1$ 、すなわち $0 < a < \log 2$ のとき、

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{e^a-1} \{ax - x \log(x+1)\} dx + \int_{e^a-1}^1 -\{ax - x \log(x+1)\} dx \\ &= \left[\frac{2a+1}{4} x^2 - \frac{x}{2} - \frac{x^2-1}{2} \log(x+1) \right]_0^{e^a-1} - \left[\frac{2a+1}{4} x^2 - \frac{x}{2} - \frac{x^2-1}{2} \log(x+1) \right]_{e^a-1}^1 \\ &= \frac{e^{2a}}{2} - 2e^a + \frac{a}{2} + \frac{7}{4} \end{aligned}$$

である。

[2] $1 \leq e^a - 1$ 、すなわち $a \geq \log 2$ のとき、

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \{ax - x \log(x+1)\} dx \\ &= \left[\frac{2a+1}{4} x^2 - \frac{x}{2} - \frac{x^2-1}{2} \log(x+1) \right]_0^1 \\ &= \frac{a}{2} - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

である。

以上[1], [2]より、

$$I = \begin{cases} \frac{e^{2a}}{2} - 2e^a + \frac{a}{2} + \frac{7}{4} & (0 < a < \log 2 \text{ のとき}) \\ \frac{a}{2} - \frac{1}{4} & (a \geq \log 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。

(答) $I = \begin{cases} \frac{e^{2a}}{2} - 2e^a + \frac{a}{2} + \frac{7}{4} & (0 < a < \log 2 \text{ のとき}) \\ \frac{a}{2} - \frac{1}{4} & (a \geq \log 2 \text{ のとき}) \end{cases}$

(4)

(3)より、 $\frac{dI}{da}$ は以下のように場合分けする。

[1] $0 < a < \log 2$ のとき、

$$I = \frac{e^{2a}}{2} - 2e^a + \frac{a}{2} + \frac{7}{4}$$

より

$$\begin{aligned} \frac{dI}{da} &= e^{2a} - 2e^a + \frac{1}{2} \\ &= \left(e^a - \frac{2+\sqrt{2}}{2} \right) \left(e^a - \frac{2-\sqrt{2}}{2} \right) \end{aligned}$$

である。

[2] $a \geq \log 2$ のとき、

$$I = \frac{a}{2} - \frac{1}{4}$$

より

$$\frac{dI}{da} = \frac{1}{2}$$

である。

以上より I に関して次の増減表を得る。

a	(0)	$\cdots$	$\log \frac{2+\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	$\log 2$	$\cdots$
$\frac{dI}{da}$		$-$	0	$+$		$+$
I		$\searrow$	極小	$\nearrow$		$\nearrow$

以上より、 I を最小にする a の値は

$$a = \log \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

である。

(答) $\log \frac{2+\sqrt{2}}{2}$

第3問

(1)

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, a_{n+1} = \frac{a_n^2 + cn - 4}{3n} \text{ より} \\ a_2 &= \frac{1^2 + c - 4}{3} \\ &= \frac{c - 3}{3} \\ a_3 &= \frac{\left(\frac{c-3}{3}\right)^2 + 2c - 4}{6} \\ &= \frac{c^2 - 6c + 9 + 18c - 36}{54} \\ &= \frac{c^2 + 12c - 27}{54} \end{aligned}$$

である。

(答) $a_2 = \frac{c-3}{3}, a_3 = \frac{c^2+12c-27}{54}$

(2)

$$\begin{aligned} a_1 + a_3 &\leq 2a_2 \\ \Leftrightarrow 1 + \frac{c^2 + 12c - 27}{54} &\leq \frac{2}{3}(c - 3) \\ \Leftrightarrow c^2 - 24c + 135 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (c - 9)(c - 15) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 9 \leq c &\leq 15 \end{aligned}$$

である。このとき、不等式 $a_n \geq 3$ ($n = 3, 4, 5, \dots$) が成り立つことを n (≥ 3) についての数学的帰納法により示す。

[1] $n = 3$ のとき

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{1}{54} \{ (c + 6)^2 - 63 \} \\ &\geq \{ (9 + 6)^2 - 63 \} \\ &= 3 \end{aligned}$$

より、 $a_3 \geq 3$ は成り立つ。

[2] $n = k$ ($k \geq 3$) で成り立つと仮定したとき

$$\begin{aligned} a_{k+1} - 3 &\geq \frac{a_k^2 + (c - 9)k - 4}{3k} \\ &\geq \frac{9 + (c - 9)k - 4}{3k} \\ &\geq \frac{c - 9}{3} + \frac{5}{3k} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

より $a_{k+1} \geq 3$ であるから、 $n = k + 1$ のときも成り立つ。

以上 [1], [2] より、 $a_n \geq 3$ ($n = 3, 4, 5, \dots$) が示された。

(証明終)

(3)

(2) より、

$$\begin{aligned} a_1 + a_3 &= 2a_2 \\ \Leftrightarrow c &= 9, 15 \end{aligned}$$

である。以下では $n \geq 3$ として考える。

[1] $c = 9$ のとき

$n \geq 4$ のとき、 $a_n < 4$ であることを数学的帰納法によって示す。

[i] $n = 4$ のとき

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n^2 + cn - 4}{3n} \\ &= \frac{c}{3} + \frac{a_n^2 - 4}{3n} \\ &= 3 + \frac{a_n^2 - 4}{3n} \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 2 \\ a_3 &= 3 \\ a_4 &= \frac{32}{9} \end{aligned}$$

と順次計算できるため、 $a_4 < 4$ が成り立つ。

[ii] $n = k$ ($k \geq 4$) で成り立つと仮定したとき

$$\begin{aligned} 4 - a_{k+1} &= 1 - \frac{a_k^2 - 4}{3k} \\ &> 1 - \frac{4^2 - 4}{3k} \\ &> 0 \end{aligned}$$

より $a_{k+1} < 4$ であるから、 $n = k + 1$ のときも成り立つ。

以上, [i], [ii] より、 $n \geq 4$ のとき $a_n < 4$ であることが示された。このとき、

$$a_{n+1} = 3 + \frac{a_n^2 - 4}{3n}$$

について、 $n \geq 4$ では $3 \leq a_n < 4$ が成り立つことから、

$$\begin{aligned} 3 + \frac{9 - 4}{3n} &\leq a_{n+1} < 3 + \frac{16 - 4}{3n} \\ \Leftrightarrow 3 + \frac{5}{3n} &\leq a_{n+1} < 3 + \frac{4}{n} \end{aligned}$$

であるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} = 0$$

より、はさみうちの原理から

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} &= 3 \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= 3 \end{aligned}$$

である。

[2] $c = 15$ のとき

任意の自然数 n について、 $a_n = 3n - 2$ であることを数学的帰納法によって示す。

[i] $n = 1$ のとき

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ \text{より、} a_1 &< 3 \cdot 1 - 2 \text{ は成り立つ。} \end{aligned}$$

[ii] $n = k$ ($k \geq 1$) で成り立つと仮定したとき

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{a_k^2 + 15k - 4}{3k} \\ &= \frac{(3k - 2)^2 + 15k - 4}{3k} \\ &= 3k + 1 \\ &= 3(k + 1) - 2 \end{aligned}$$

であるから、 $n = k + 1$ のときも成り立つ。

以上, [i], [ii] より、任意の自然数 n について $a_n = 3n - 2$ であるため、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (3n - 2) \\ &= \infty \end{aligned}$$

である。

以上, [1], [2] を合わせると、

$$\begin{aligned} c = 9 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= 3 \\ c = 15 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \infty \end{aligned}$$

である。

(答) $c = 9$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$
 $c = 15$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

第4問

(1)

箱 A に入っている球は 3, 6, 9 の番号が書かれた球であるから、球の入れ方は残りの 6 個を箱 B, C に 3 個ずつ入れる入れ方である。よって、

$$\begin{aligned}{}_6C_3 &= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= 20 \text{ (通り)}\end{aligned}$$

である。

(答) 20 通り

(2)

球に書かれた番号を 3 で割った余りについて考えると、10 個の球のうち余りが 0 の球は 3 個、余りが 1 の球は 4 個、余りが 2 の球は 3 個である。箱 A にある 3 個の球の番号の和が 3 の倍数になるのは、3 個の球の余りの組み合わせが

$$(0, 0, 0), (1, 1, 1), (2, 2, 2), (0, 1, 2)$$

のいずれかになる場合である。 $a = 10$ のとき、余りの組み合わせが $(0, 0, 0)$ になるような箱 A への球の入れ方は 1 通りであるから、球の入れ方は

$$1 \cdot {}_6C_3 = 20 \text{ (通り)}$$

である。 $(1, 1, 1), (2, 2, 2)$ についても同様に考えると球の入れ方は 20 通りずつである。一方で、余りの組み合わせが $(0, 1, 2)$ になるような箱 A への球の入れ方は

$$3^3 = 27 \text{ (通り)}$$

であるから、球の入れ方は

$$27 \cdot {}_6C_3 = 540 \text{ (通り)}$$

である。以上より、球の入れ方は全部で

$$20 + 20 + 20 + 540 = 600 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 600 通り

(3)

10 個の球の番号の和は

$$1 + 2 + \cdots + 9 + 10 = 55$$

であるから、いずれの箱についても 3 個の球の番号の和が 3 の倍数になるのは

$$a = 1, 4, 7, 10$$

のときである。このとき、残りの 9 個の球のうち余りが 0, 1, 2 の球はそれぞれ 3 個ずつあるため、箱 A, B, C のそれぞれに入る 3 個の球の余りの組み合わせは

$$[1] \quad (0, 0, 0) \text{ と } (1, 1, 1) \text{ と } (2, 2, 2)$$

または

$$[2] \quad (0, 1, 2) \text{ と } (0, 1, 2) \text{ と } (0, 1, 2)$$

のいずれかである。以下、 $a = 10$ としてそれぞれの場合について考える。

[1] $(0, 0, 0), (1, 1, 1), (2, 2, 2)$ のとき

番号 1, 4, 7 が書かれた球 3 個は同じ箱に入り、同様にして番号 2, 5, 8 が書かれた球 3 個、番号 3, 6, 9 が書かれた球 3 個はそれぞれ同じ箱に入るため、箱 A, B, C への球の入れ方は

$$3! = 6 \text{ (通り)}$$

である。

[2] $(0, 1, 2), (0, 1, 2), (0, 1, 2)$ のとき

まず箱 A について考えると、3 個の球の入れ方は

$$3^3 = 27 \text{ (通り)}$$

である。次に箱 B について考えると、残りの 6 個の球のうち余りが 0, 1, 2 の球はそれぞれ 2 個ずつあるため、3 個の球の入れ方は

$$2^3 = 8 \text{ (通り)}$$

である。したがって、箱 A, B, C への球の入れ方は

$$27 \times 8 = 216 \text{ (通り)}$$

である。

以上[1], [2]より、 $a = 10$ のときの球の入れ方は

$$6 + 216 = 222 \text{ (通り)}$$

であり、 $a = 1, 4, 7$ についても同様に考えられるため、球の入れ方は全部で

$$222 \times 4 = 888 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 888 通り