

第1問

(1)

点 A の直交座標は,

$$\left(1 \cdot \cos \frac{\pi}{3}, 1 \cdot \sin \frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

である。

(答) $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(2)

極座標において $A\left(1, \frac{\pi}{3}\right), B\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$ より,

$$OA=1$$

$$OB=2$$

$$\angle AOB=\frac{\pi}{3}$$

であるから, $\triangle OAB$ は $OA:OB:AB=1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形である。よって,

$$\angle OAB=\frac{\pi}{2}$$

である。

(答) $\frac{\pi}{2}$

(3)

極座標において $B\left(2, \frac{2\pi}{3}\right), C\left(3, \frac{4\pi}{3}\right)$ より,

$$OB=2$$

$$OC=3$$

$$\angle BOC=\frac{2\pi}{3}$$

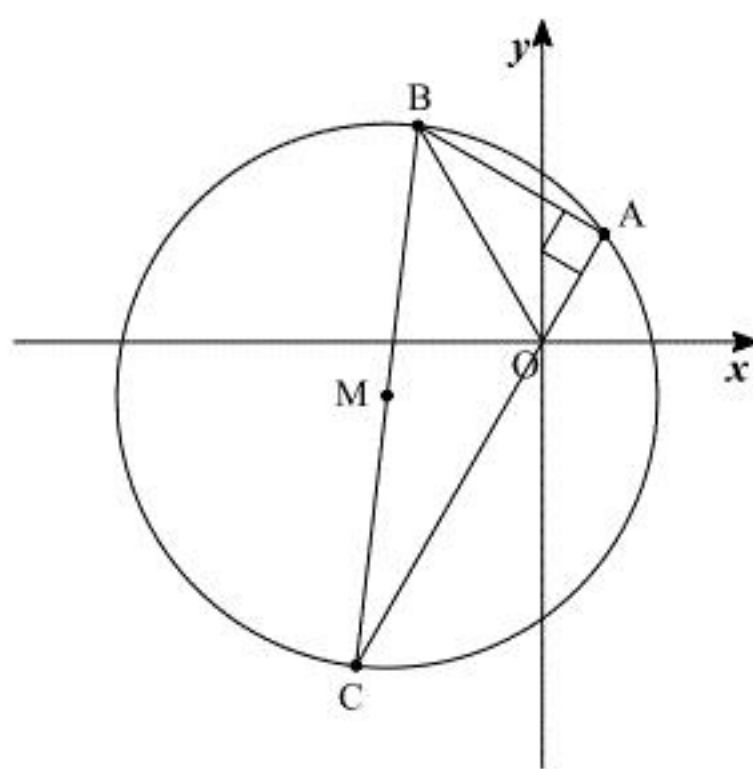
であるから,

$$\begin{aligned}\triangle OBC &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin \frac{2\pi}{3} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(4)



点 A, O, C は同一直線上にあるため,

$$\begin{aligned}\angle CAB &= \angle OAB \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

である。したがって, 線分 BC は $\triangle ABC$ の外接円の直径であり, 外接円の中心は線分 BC の中

点 M となる。点 B, C の直交座標は $(-1, \sqrt{3}), \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ であるから, 外接円の中心 M の座標は

$$\left(\frac{-1-\frac{3}{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{2}\right)=\left(-\frac{5}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

である。また, 外接円の半径は,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}BC &= \frac{1}{2} \sqrt{\left\{\left(-\frac{3}{2}\right)-(-1)\right\}^2 + \left\{\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)-\sqrt{3}\right\}^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{76}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{19}}{2}\end{aligned}$$

である。

(答) 中心 $\left(-\frac{5}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, 半径 $\frac{\sqrt{19}}{2}$

第2問

(1)

$$\begin{aligned} |\overline{OA}| &= \sqrt{3^2 + (-3)^2 + 6^2} \\ &= 3\sqrt{6} \\ |\overline{OB}| &= \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{6} \end{aligned}$$

であるから、点Cは線分ABを3:1に内分する点であり、

$$\begin{aligned} \overline{OC} &= \frac{1}{4}\overline{OA} + \frac{3}{4}\overline{OB} \\ &= \frac{1}{4}(3, -3, 6) + \frac{3}{4}(-1, 1, 2) \\ &= (0, 0, 3) \end{aligned}$$

である。

$$\overline{OD} = (s, t, u)$$

とおくと、 $\overline{OA} \perp \overline{CD}$ より

$$\begin{aligned} \overline{OA} \cdot \overline{CD} &= 0 \\ \Leftrightarrow \overline{OA} \cdot (\overline{OD} - \overline{OC}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (3, -3, 6) \cdot (s, t, u-3) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3s - 3t + 6(u-3) &= 0 \\ \Leftrightarrow s - t + 2u &= 6 \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1} \end{aligned}$$

となり、 $\overline{OB} \perp \overline{CD}$ より

$$\begin{aligned} \overline{OB} \cdot \overline{CD} &= 0 \\ \Leftrightarrow \overline{OB} \cdot (\overline{OD} - \overline{OC}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (-1, 1, 2) \cdot (s, t, u-3) &= 0 \\ \Leftrightarrow -s + t + 2(u-3) &= 0 \\ \Leftrightarrow -s + t + 2u &= 6 \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。したがって、①、②より

$$s = t, u = 3$$

となる。このとき、 $\overline{OD}$ は

$$\overline{OD} = (s, s, 3)$$

と表されることから、

$$\begin{aligned} |\overline{OD}| &= 3\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow |\overline{OD}|^2 &= 27 \\ \Leftrightarrow s^2 + s^2 + 9 &= 27 \\ \Leftrightarrow s^2 &= 9 \\ \Leftrightarrow s &= \pm 3 \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\overline{OD} = (\pm 3, \pm 3, 3) \quad (\text{複号同順})$$

である。

(答) $\overline{OC} = (0, 0, 3)$, $\overline{OD} = (\pm 3, \pm 3, 3)$ (複号同順)

(2)

$\overline{OA} \perp \overline{CD}$ および $\overline{OB} \perp \overline{CD}$ より $\triangle OAB \perp \overline{CD}$ であるから、四面体OABDの体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \triangle OAB \cdot CD \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{|\overline{OA}|^2 |\overline{OB}|^2 - (\overline{OA} \cdot \overline{OB})^2} \cdot |\overline{CD}| \end{aligned}$$

と表される。ここで、

$$\begin{aligned} \overline{OA} \cdot \overline{OB} &= (3, -3, 6) \cdot (-1, 1, 2) \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{CD} &= \overline{OD} - \overline{OC} \\ &= (\pm 3, \pm 3, 3) - (0, 0, 3) \\ &= (\pm 3, \pm 3, 0) \end{aligned}$$

$$\therefore |\overline{CD}| = 3\sqrt{2}$$

であることから、

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{(3\sqrt{6})^2 \cdot (\sqrt{6})^2 - 6^2} \cdot 3\sqrt{2} \\ &= \frac{1}{6} \cdot 12\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} \\ &= 12 \end{aligned}$$

である。

(答) 12

第3問

(1)

$$\begin{aligned} a\sqrt{x}-x &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x}(a-\sqrt{x}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0, a \quad (\because a > 0) \\ \Leftrightarrow x = 0, a^2 \end{aligned}$$

である。

(答) $x=0, a^2$

(2)

$$a\sqrt{x}-x = \sqrt{x}(a-\sqrt{x})$$

より, $0 < x < a^2$ において

$$a\sqrt{x}-x > 0$$

であり, $a^2 < x$ において

$$a\sqrt{x}-x < 0$$

である。したがって, I の値は a により以下のように場合分けできる。

[1] $a^2 < 1$ すなわち $0 < a < 1$ のとき

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{a^2} (a\sqrt{x}-x) dx - \int_{a^2}^1 (a\sqrt{x}-x) dx \\ &= \left[\frac{2}{3} ax\sqrt{x} - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^{a^2} - \left[\frac{2}{3} ax\sqrt{x} - \frac{1}{2} x^2 \right]_{a^2}^1 \\ &= 2 \left(\frac{2}{3} a^4 - \frac{1}{2} a^4 \right) - \left(\frac{2}{3} a - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{3} a^4 - \frac{2}{3} a + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

[2] $a^2 \geq 1$ すなわち $a \geq 1$ のとき,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (a\sqrt{x}-x) dx \\ &= \left[\frac{2}{3} ax\sqrt{x} - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} a - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

以上[1], [2]より,

$$I = \begin{cases} \frac{2}{3} a - \frac{1}{2} & (a \geq 1 \text{ のとき}) \\ \frac{1}{3} a^4 - \frac{2}{3} a + \frac{1}{2} & (0 < a < 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。

$$(答) \quad I = \begin{cases} \frac{2}{3} a - \frac{1}{2} & (a \geq 1 \text{ のとき}) \\ \frac{1}{3} a^4 - \frac{2}{3} a + \frac{1}{2} & (0 < a < 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(3)

(2)の結果より, $0 < a < 1$ のとき

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3} a^4 - \frac{2}{3} a + \frac{1}{2} \\ \frac{dI}{da} &= \frac{4}{3} a^3 - \frac{2}{3} \\ &= \frac{4}{3} \left(a^3 - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

であり, $a \geq 1$ のとき

$$I = \frac{2}{3} a - \frac{1}{2}$$

より I は単調増加であるから, $a > 0$ の範囲における I の増減表は以下ようになる。

a	(0)	...	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	...	1	...
$\frac{dI}{da}$		-	0	+		+
I			$-\frac{1}{2\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{2}$		$\frac{1}{6}$	

以上より, I の最小値は $-\frac{1}{2\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{2}$ である。

(答) $-\frac{1}{2\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{2}$

第4問

(1)

箱 A に入っている球は 3, 6, 9 の番号が書かれた球であるから、球の入れ方は残りの 6 個を箱 B, C に 3 個ずつ入れる入れ方である。よって、

$$\begin{aligned}{}_6C_3 &= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= 20 \text{ (通り)}\end{aligned}$$

である。

(答) 20 通り

(2)

球に書かれた番号を 3 で割った余りについて考えると、9 個の球のうち余りが 0, 1, 2 の球はそれぞれ 3 個ずつある。したがって、箱 A への球の入れ方は

$$3^3 = 27 \text{ (通り)}$$

である。残りの 6 個を箱 B, C に入れる入れ方は(1)より 20 通りであるから、求める場合の数は

$$27 \cdot 20 = 540 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 540 通り

(3)

箱 A にある 3 個の球の番号の和が 3 の倍数となるのは、3 個の球の番号をそれぞれ 3 で割った余りの組み合わせが

$$(0, 0, 0), (1, 1, 1), (2, 2, 2), (0, 1, 2)$$

のいずれかになるときである。余りの組が $(0, 0, 0)$ のとき、箱 A への球の入れ方は 1 通りであり、(1)より 3 つの箱 A, B, C への球の入れ方は 20 通りである。余りの組が $(1, 1, 1), (2, 2, 2)$ のときも同様に考えて、3 つの箱 A, B, C への球の入れ方はそれぞれ 20 通りである。また、余りの組が $(0, 1, 2)$ のとき、(2)より 3 つの箱 A, B, C への球の入れ方は 540 通りである。以上より、求める場合の数は

$$20 \cdot 3 + 540 = 600 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 600 通り

(4)

9 個の球のうち余りが 0, 1, 2 の球はそれぞれ 3 個ずつあるため、いずれの箱についても 3 個の球の番号の和が 3 の倍数となるとき、箱 A, B, C のそれぞれに入る 3 個の球の余りの組み合わせは

$$[1] \quad (0, 0, 0) \text{ と } (1, 1, 1) \text{ と } (2, 2, 2)$$

または

$$[2] \quad (0, 1, 2) \text{ と } (0, 1, 2) \text{ と } (0, 1, 2)$$

のいずれかである。

[1] $(0, 0, 0), (1, 1, 1), (2, 2, 2)$ のとき

番号 1, 4, 7 が書かれた球 3 個は同じ箱に入り、同様にして番号 2, 5, 8 が書かれた球 3 個、番号 3, 6, 9 が書かれた球 3 個はそれぞれ同じ箱に入るため、箱 A, B, C への球の入れ方は

$$3! = 6 \text{ (通り)}$$

である。

[2] $(0, 1, 2), (0, 1, 2), (0, 1, 2)$ のとき

まず箱 A について考えると、3 個の球の入れ方は

$$3^3 = 27 \text{ (通り)}$$

である。次に箱 B について考えると、残りの 6 個の球のうち余りが 0, 1, 2 の球はそれぞれ 2 個ずつあるため、3 個の球の入れ方は

$$2^3 = 8 \text{ (通り)}$$

である。したがって、箱 A, B, C への球の入れ方は

$$27 \times 8 = 216 \text{ (通り)}$$

である。

以上[1], [2]より、求める場合の数は

$$6 + 216 = 222 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 222 通り