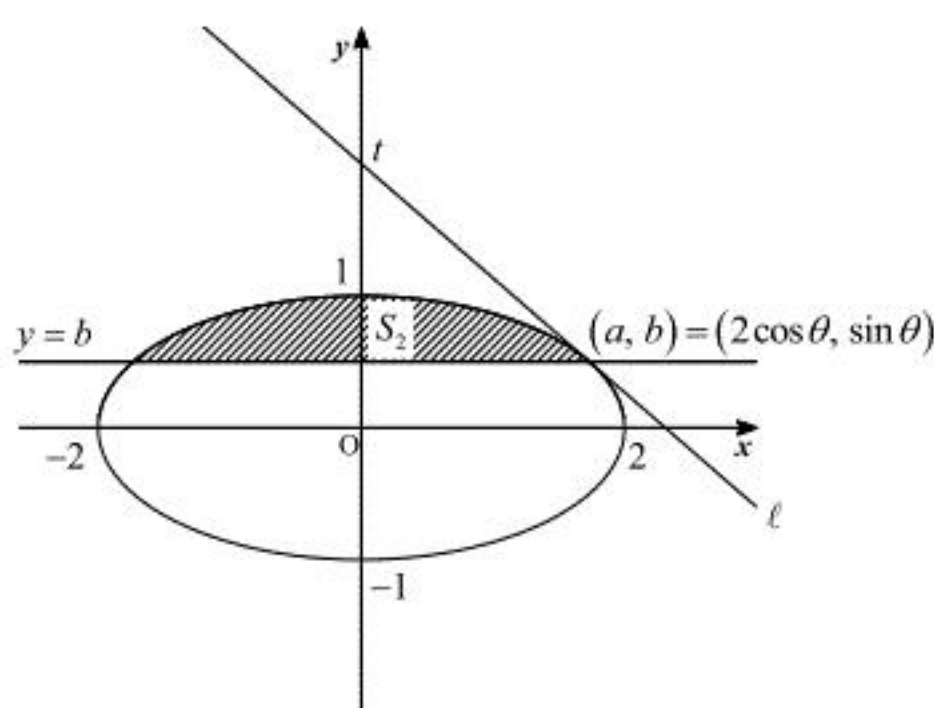


第1問



(1)

点 (a, b) を、媒介変数 $\theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ を用いて $(2 \cos \theta, \sin \theta)$ と表す。このとき、点 (a, b) における曲線 C の接線 ℓ の方程式は

$$\frac{x \cdot 2 \cos \theta}{4} + y \cdot \sin \theta = 1 \Leftrightarrow x \cos \theta + 2y \sin \theta = 2$$

となり、これが点 $(0, t)$ を通ることから、

$$2t \sin \theta = 2 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sin \theta}$$

となる。また、 ℓ の x 切片は

$$x \cos \theta = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{\cos \theta}$$

であるから、 x 軸、 y 軸と ℓ で囲まれた部分の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\cos \theta} \cdot \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{2}{\sin 2\theta}$$

となる。ここで、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $0 < 2\theta < \pi$ であるから、上式は $\theta = \frac{\pi}{4}$ のときに最小値 2 をとり、このとき

$$t = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$$

である。

(答) 2

(2)

まず、(1)の経過より、以下の関係

$$t = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{b}$$

が成り立つ。次に、曲線 C の方程式を変形すると、第1象限における曲線の方程式は

$$x = 2\sqrt{1-y^2}$$

となる。曲線 C と直線 $y=b$ で囲まれる領域は y 軸対称であるから、この部分の面積は第1象限部分の面積の2倍である。したがって、

$$S_2(t) = 2 \int_b^1 2\sqrt{1-y^2} dy = 4 \int_{\frac{1}{t}}^1 \sqrt{1-y^2} dy$$

となる。上式を t で微分すると、

$$S_2'(t) = -4 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{t}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{t}\right)' = \frac{4\sqrt{t^2-1}}{t^3}$$

となり、さらに t で微分すると、

$$S_2''(t) = \frac{2 \cdot \frac{2t}{\sqrt{t^2-1}} \cdot t^3 - 4\sqrt{t^2-1} \cdot 3t^2}{t^6} = \frac{-4(2t^2-3)}{t^4\sqrt{t^2-1}}$$

となるから、 $S_2'(t)$ の増減は以下に示す通りとなる。

t	1	...	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	...
$S_2''(t)$	/	+	0	-
$S_2'(t)$	/	↗	$\frac{8\sqrt{3}}{9}$	↘

増減表より、 $S_2'(t)$ は $t = \frac{\sqrt{6}}{2}$ のときに最大値 $\frac{8\sqrt{3}}{9}$ をとる。

(答) $\frac{8\sqrt{3}}{9}$

第2問

(1)

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とする。このとき、仮定より

$$\overrightarrow{OP} = p\vec{a}$$

$$\overrightarrow{OQ} = (1-q)\vec{a} + q\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OR} = (1-r)\vec{b}$$

となる。ここで、 $\triangle OAB$ の重心を G とすると

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3}$$

となり、 $\triangle PQR$ の重心を G' とすると

$$\overrightarrow{OG'} = \frac{\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}}{3} = \frac{(1+p-q)\vec{a} + (1+q-r)\vec{b}}{3}$$

となる。したがって、 G と G' が一致するとき、

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OG'}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3} = \frac{(1+p-q)\vec{a} + (1+q-r)\vec{b}}{3}$$

$$\Leftrightarrow (p-q)\vec{a} + (q-r)\vec{b} = \vec{0}$$

となり、 $\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立であるから、

$$\begin{cases} p-q=0 \\ q-r=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow p=q=r$$

$$\therefore p:q:r=1:1:1$$

となる。

(答) $p:q:r=1:1:1$

(2)

仮定より、

$$\overrightarrow{OP'} = \frac{p\vec{a}}{p-(1-p)} = \frac{p}{2p-1}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{OQ'} = \frac{-(1-q)\vec{a} + q\vec{b}}{q-(1-q)} = \frac{q-1}{2q-1}\vec{a} + \frac{q}{2q-1}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OR'} = \frac{-(1-r)\vec{b}}{r-(1-r)} = \frac{r-1}{2r-1}\vec{b}$$

となる。 $\overrightarrow{P'Q'}$, $\overrightarrow{P'R'}$ は平行でないから、3点 $P'Q'R'$ は三角形を作る。よって、 $\triangle P'Q'R'$ の重心を G'' とすると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG''} &= \frac{\overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{OQ'} + \overrightarrow{OR'}}{3} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{p}{2p-1} + \frac{q-1}{2q-1} \right) \vec{a} + \frac{1}{3} \left(\frac{q}{2q-1} + \frac{r-1}{2r-1} \right) \vec{b} \end{aligned}$$

となるから、 G と G'' が一致するとき

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OG''}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3} = \frac{1}{3} \left(\frac{p}{2p-1} + \frac{q-1}{2q-1} \right) \vec{a} + \frac{1}{3} \left(\frac{q}{2q-1} + \frac{r-1}{2r-1} \right) \vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{p}{2p-1} + \frac{q-1}{2q-1} - 1 \right) \vec{a} + \left(\frac{q}{2q-1} + \frac{r-1}{2r-1} - 1 \right) \vec{b} = \vec{0}$$

となり、 $\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立であるから

$$\frac{p}{2p-1} + \frac{q-1}{2q-1} - 1 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{q}{2q-1} + \frac{r-1}{2r-1} - 1 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。ここで、 $\textcircled{1}$ を変形すると、

$$p(2q-1) + (q-1)(2p-1) = (2p-1)(2q-1)$$

$$\Leftrightarrow p = q$$

となり、同様に $\textcircled{2}$ を変形すると $q = r$ となる。以上より、

$$p = q = r$$

$$\Leftrightarrow p:q:r=1:1:1$$

であるから、このとき(1)の結果より、 $\triangle OAB$ の重心と $\triangle PQR$ の重心も一致する。

(証明終)

(3)

$$\overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{OQ'} - \overrightarrow{OP'} = \left(\frac{q-1}{2q-1} - \frac{p}{2p-1} \right) \vec{a} + \frac{q}{2q-1} \vec{b}$$

$$\overrightarrow{P'R'} = \overrightarrow{OQ'} - \overrightarrow{OR'} = -\frac{p}{2p-1} \vec{a} + \frac{r-1}{2r-1} \vec{b}$$

となる。ここで、 $\overrightarrow{P'Q'}$ と $\overrightarrow{P'R'}$ が平行であることから、

$$\left(\frac{q-1}{2q-1} - \frac{p}{2p-1} \right) : \left(-\frac{p}{2p-1} \right) = \frac{q}{2q-1} : \frac{r-1}{2r-1}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{p}{2p-1} \cdot \frac{q}{2q-1} = \left(\frac{q-1}{2q-1} - \frac{p}{2p-1} \right) \cdot \frac{r-1}{2r-1}$$

$$\Leftrightarrow -pq(2r-1) = \{(q-1)(2p-1) - p(2q-1)\}(r-1)$$

$$\Leftrightarrow -2pqr + pq = (1-q-p)(r-1)$$

$$\Leftrightarrow -2pqr + pq = p + q - 1 - rp - qr + r$$

$$\Leftrightarrow 2pqr + p + q + r = pq + qr + rp + 1$$

となる。

(証明終)

第3問

(1)

以下の命題

$$\begin{aligned} P(x) &= m_0 + m_1 f_1(x) + m_2 f_2(x) \text{ という形に表せる} \\ \Leftrightarrow P(x) &\text{ は整数値整式} \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

を示せばよい。

[1] $\Rightarrow$ が成り立つことの証明

x が整数のとき、 $P(x) = m_0 + m_1 f_1(x) + m_2 f_2(x)$ の各項が整数となることを示す。第1項 m_0 は整数である。第2項について、 x が整数のとき $f_1(x) = x$ は整数であるから、2つの整数の積 $m_1 f_1(x)$ は整数である。第3項について、 x が整数のとき、 $x(x-1)$ は連続する整数の積であるから偶数である。よって、 $f_2(x) = \frac{1}{2}x(x-1)$ は整数であり、2つの整数の積 $m_2 f_2(x)$ も整数であり。以上より、 x が整数のとき、 $P(x)$ の全ての項が整数であるから、 $P(x)$ は整数であり、 $\Rightarrow$ が示された。

[2] $\Leftarrow$ が成り立つことの証明

$$\begin{aligned} P(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= c + (a+b)x + 2a \cdot \frac{x(x-1)}{2} \\ &= c + (a+b)f_1(x) + 2af_2(x) \end{aligned}$$

と変形できる。よって、 $P(x)$ が整数値整式であるとき、 $c, a+b, 2a$ が整数であることを示せばよい。まず、 $x=0$ を代入すると、

$$P(0) = c$$

となり、 $P(0)$ は整数であるから、 c は整数である。 $x=1$ を代入すると、

$$P(1) = c + (a+b)$$

となり、 $P(1)$ および c は整数であるから、 $a+b$ は整数である。 $x=2$ を代入すると、

$$P(2) = c + (a+b) \cdot 2 + 2a$$

となり、 $P(2), c, a+b$ は整数であるから、 $2a$ は整数である。以上より、 $\Leftarrow$ が示された。

以上[1], [2]より、 $\textcircled{1}$ が成り立つことが示されたから、題意は示された。

(証明終)

(2)

以下の命題

$$\begin{aligned} P(x) &= m_0 + m_1 f_1(x) + m_2 f_2(x) + m_3 f_3(x) \text{ という形に表せる} \\ \Leftrightarrow P(x) &\text{ は整数値整式} \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

を示せばよい。

[1] $\Rightarrow$ が成り立つことの証明

(1)で示した通り、 x が整数のとき、 $P(x) = m_0 + m_1 f_1(x) + m_2 f_2(x) + m_3 f_3(x)$ の第1項から第3項まではすべて整数である。第4項について、 x が整数のとき、 $x(x-1)(x-2)$ は連続する3つの整数の積であるから、6の倍数である。よって、 $f_3(x) = \frac{1}{6}x(x-1)(x-2)$ は整数であり、2つの整数の積 $m_3 f_3(x)$ も整数であり。以上より、 x が整数のとき、 $P(x)$ の全ての項が整数であるから、 $P(x)$ は整数であり、 $\Rightarrow$ が示された。

[2] $\Leftarrow$ が成り立つことの証明

$$\begin{aligned} P(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ &= 6a \cdot \frac{1}{6}x(x-1)(x-2) + 3ax^2 - 2ax + bx^2 + cx + d \\ &= 6af_3(x) + (3a+b)x^2 + (c-2a)x + d \\ &= 6af_3(x) + \frac{2(3a+b)}{2}x(x-1) + (3a+b)x + (c-2a)x + d \\ &= d + (a+b+c)f_1(x) + 2(3a+b)f_2(x) + 6af_3(x) \end{aligned}$$

と変形できる。よって、 $P(x)$ が整数値整式であるとき、 $d, a+b+c, 2(3a+b), 6a$ が整数であることを示せばよい。まず、 $x=0$ を代入すると、

$$P(0) = d$$

となり、 $P(0)$ は整数であるから、 d は整数である。 $x=1$ を代入すると、

$$P(1) = d + (a+b+c)$$

となり、 $P(1)$ および d は整数であるから、 $a+b+c$ は整数である。 $x=2$ を代入すると、

$$P(2) = d + (a+b+c) \cdot 2 + 2(3a+b)$$

となり、 $P(2), d, a+b+c$ は整数であるから、 $2(3a+b)$ は整数である。 $x=3$ を代入すると

$$P(3) = d + (a+b+c) \cdot 3 + 2(3a+b) \cdot 3 + 6a$$

となり、 $P(3), d, a+b+c, 2(3a+b)$ は整数であるから、 $6a$ は整数である。以上より、 $\Leftarrow$ が示された。

以上[1], [2]より、 $\textcircled{2}$ が成り立つことが示されたから、題意は示された。

(証明終)

第4問

(1)

P_0 は最初に袋 A から玉を 2 個取り出すとき、いずれも白玉である確率に等しく、

$$P_0 = \frac{{}_3C_2}{{}_4C_2} = \frac{1}{2}$$

となる。ここで、袋 A に赤玉がある場合に、操作(i)で赤玉が袋 B に移動する条件付き確率を求める。これは、袋 A から赤玉を取り出し、袋 B に入れてよくかきまぜた上で袋 B から白玉

を取り出す確率に等しいから、 $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ である。同様に、袋 B に赤玉がある場合に、操作(ii)

で赤玉が袋 A に移動する条件付き確率は $\frac{1}{3}$ である。これらの場合を除き赤玉の移動は生じな

いことに注意し、最初の状態による場合分けを利用して P_1 を求める。

[1] 袋 A に赤玉がある場合

1 回の作業後も赤玉が袋 A にあるのは、

- ・操作(i)で赤玉が移動しない
- ・操作(i)で赤玉が袋 B に移動し、操作(ii)で赤玉が袋 A に移動する

のいずれかの場合である。したがって、赤玉が袋 A にある条件のもとで、1 回の作業後に赤玉が袋 A にある条件付き確率を求めると、

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{9}$$

となる。

[2] 袋 B に赤玉がある場合

1 回の作業後に赤玉が袋 A にあるのは、

- ・操作(ii)で赤玉が袋 A に移動する

場合のみである。したがって、赤玉が袋 B にある条件のもとで、1 回の作業後に赤玉が袋

A にある条件付き確率を求めると、 $\frac{1}{3}$ となる。

以上[1], [2]より、 P_1 を求めると、

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0 \cdot \frac{7}{9} + (1 - P_0) \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{4}{9} P_0 + \frac{1}{3} \\ &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad P_0 = \frac{1}{2}, P_1 = \frac{5}{9}$$

(2)

(1)で述べた事実を利用し、 P_n の漸化式を求めると、

$$\begin{aligned} P_n &= P_{n-1} \cdot \frac{7}{9} + (1 - P_{n-1}) \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{4}{9} P_{n-1} + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore P_n - \frac{3}{5} = \frac{4}{9} \left(P_{n-1} - \frac{3}{5} \right)$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} P_n - \frac{3}{5} &= \left(P_0 - \frac{3}{5} \right) \cdot \left(\frac{4}{9} \right)^n \\ &= -\frac{1}{10} \cdot \left(\frac{4}{9} \right)^n \\ \therefore P_n &= \frac{3}{5} - \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{4}{9} \right)^n \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad P_n = \frac{3}{5} - \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{4}{9} \right)^n$$

(3)

最初に入れ方で赤玉が袋 A にある条件のもとで、 n 回の作業後に赤玉が袋 A にある条件付き確率を Q_n とおく。このとき $Q_0 = 1$ であり、(2)と同様に Q_n の漸化式を求めると、

$$\begin{aligned} Q_n &= \frac{4}{9} Q_{n-1} + \frac{1}{3} \\ \therefore Q_n - \frac{3}{5} &= \frac{4}{9} \left(Q_{n-1} - \frac{3}{5} \right) \end{aligned}$$

となるから、 Q_n の一般項は、

$$\begin{aligned} Q_n - \frac{3}{5} &= \left(Q_0 - \frac{3}{5} \right) \cdot \left(\frac{4}{9} \right)^n \\ &= \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{4}{9} \right)^n \\ \therefore Q_n &= \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{4}{9} \right)^n \end{aligned}$$

となる。よって、「最初に入れ方で赤玉が袋 A にあり、かつ n 回の作業後に赤玉が袋 A にある確率」は、 P_0 と上で求めた条件付き確率 Q_n の積であるから、

$$P_0 \cdot Q_n = \frac{Q_n}{2}$$

となる。求める確率は「最初に入れ方で赤玉が袋 A にあり、かつ n 回の作業後に赤玉が袋 A にある確率」と「 n 回の作業後に赤玉が袋 A にある確率」の比であるから、

$$\frac{\frac{Q_n}{2}}{P_n} = \frac{\frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{4}{9} \right)^n}{2 \cdot \left\{ \frac{3}{5} - \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{4}{9} \right)^n \right\}} = \frac{3 \cdot 9^n + 2 \cdot 4^n}{6 \cdot 9^n - 4^n}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{3 \cdot 9^n + 2 \cdot 4^n}{6 \cdot 9^n - 4^n}$$