

第1問

(1)

$$a_n + 2S_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow S_n = -\frac{1}{2}a_n + 3 \cdot 2^{n-2}$$

より,

$$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$$

$$= \left(-\frac{1}{2}a_{n+1} + 3 \cdot 2^{n-1} \right) - \left(-\frac{1}{2}a_n + 3 \cdot 2^{n-2} \right)$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 2^{n-1} \quad \dots \textcircled{1}$$

と求まる。

(答) $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 2^{n-1}$

(2)

$$a_1 = S_1$$

$$\Leftrightarrow a_1 = -\frac{1}{2}a_1 + 3 \cdot 2^{1-2}$$

$$\Leftrightarrow a_1 = 1$$

である。また、①の両辺を 2^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{3}{10} = \frac{1}{6} \left(\frac{a_n}{2^n} - \frac{3}{10} \right)$$

が得られ、 $\frac{a_1}{2^1} - \frac{3}{10} = \frac{1}{5}$ であるから、

$$\frac{a_n}{2^n} - \frac{3}{10} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{6} \right)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow a_n = \frac{3 \cdot 2^{n-1}}{5} + \frac{2}{5 \cdot 3^{n-1}}$$

と求まる。

(答) $\frac{3 \cdot 2^{n-1}}{5} + \frac{2}{5 \cdot 3^{n-1}}$

(3)

$$S_n = -\frac{1}{2}a_n + 3 \cdot 2^{n-2}$$

となるため、

$$3^{k-1}S_k = 3^{k-1} \left(-\frac{1}{2}a_k + 3 \cdot 2^{k-2} \right)$$

$$= 3^{k-1} \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{3 \cdot 2^{k-1}}{5} + \frac{2}{5 \cdot 3^{k-1}} \right) + 3 \cdot 2^{k-2} \right\}$$

$$= \frac{6^k}{5} - \frac{1}{5}$$

であるから、

$$\sum_{k=1}^n 3^{k-1}S_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{6^k}{5} - \frac{1}{5} \right)$$

$$= \frac{6}{5} \cdot \frac{6^n - 1}{6 - 1} - \frac{1}{5}n$$

$$= \frac{6^{n+1} - 5n - 6}{25}$$

と求まる。

(答) $\frac{6^{n+1} - 5n - 6}{25}$

第2問

(1)

$$\arg \alpha = \arg \beta + \frac{\pi}{2}, |\beta| = 1 \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{|\alpha|} &= \frac{\beta}{|\beta|} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \\ \Leftrightarrow \beta &= \frac{-i\alpha}{|\alpha|} \end{aligned}$$

が得られる。

$$(\text{答}) \quad \beta = \frac{-i\alpha}{|\alpha|}$$

(2)

Cは直線OA上の点であるから、実数 k を用いて $\gamma = k\alpha$ とおける。また、Cは線分ABの垂直二等分線上の点であるから、 $AC = BC$ であり

$$\begin{aligned} |\alpha - \gamma| &= |\beta - \gamma| \\ \Leftrightarrow |\alpha - k\alpha| &= \left| \frac{-i\alpha}{|\alpha|} - k\alpha \right| \\ \Leftrightarrow |1 - k| &= \left| \frac{-i}{|\alpha|} - k \right| \quad (\because |\alpha| > 0) \\ \Leftrightarrow |1 - k|^2 &= \left| \frac{-i}{|\alpha|} - k \right|^2 \\ \Leftrightarrow (1 - k)^2 &= \left(\frac{-i}{|\alpha|} - k \right) \cdot \left(\frac{i}{|\alpha|} - k \right) \\ \Leftrightarrow 1 - 2k + k^2 &= \frac{1}{|\alpha|^2} + k^2 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{|\alpha|^2 - 1}{2|\alpha|^2} \end{aligned}$$

が得られる。したがって、 $\gamma = \frac{|\alpha|^2 - 1}{2|\alpha|^2} \alpha$ である。

$$(\text{答}) \quad \gamma = \frac{|\alpha|^2 - 1}{2|\alpha|^2} \alpha$$

(3)

Pは原点でない虚軸上より、0でない実数 p を用いて $z = pi$ とおける。 $\angle APB = \frac{\pi}{2}$ より、

$\frac{\beta - z}{\alpha - z}$ は純虚数である。ここで

$$\begin{aligned} \frac{\beta - z}{\alpha - z} &= \frac{\frac{-i\alpha}{|\alpha|} - pi}{\alpha - pi} \\ &= \frac{(-\alpha - p|\alpha|)(\overline{\alpha - pi})}{|\alpha|(\alpha - pi)(\overline{\alpha - pi})} i \\ &= \frac{-(\alpha + p|\alpha|)(\overline{\alpha} + pi)}{|\alpha||\alpha - pi|^2} i \end{aligned}$$

と変形できるから、 $\frac{\beta - z}{\alpha - z}$ が純虚数である条件は、 $(\alpha + p|\alpha|)(\overline{\alpha} + pi)$ が実数であることである。

$(\alpha + p|\alpha|)(\overline{\alpha} + pi)$ が実数のとき

$$\begin{aligned} (\alpha + p|\alpha|)(\overline{\alpha} + pi) &= \overline{(\alpha + p|\alpha|)(\overline{\alpha} + pi)} \\ \Leftrightarrow (\alpha + p|\alpha|)(\overline{\alpha} + pi) &= (\overline{\alpha} + p|\alpha|)(\alpha - pi) \\ \Leftrightarrow 2|\alpha|p^2i &= p|\alpha|(\alpha - \overline{\alpha}) - pi(\alpha + \overline{\alpha}) \\ \Leftrightarrow 2|\alpha|pi &= |\alpha|(\alpha - \overline{\alpha}) - i(\alpha + \overline{\alpha}) \quad (\because p \neq 0) \\ \Leftrightarrow p &= \frac{|\alpha|(\alpha - \overline{\alpha}) - i(\alpha + \overline{\alpha})}{2|\alpha|i} \end{aligned}$$

が得られる。ここで $\alpha - \overline{\alpha}$ は純虚数、 $\alpha + \overline{\alpha}$ は実数であるから p は実数である。したがって、

$$\begin{aligned} z &= \frac{|\alpha|(\alpha - \overline{\alpha}) - i(\alpha + \overline{\alpha})}{2|\alpha|} \\ &= \frac{\alpha - \overline{\alpha}}{2} - \frac{\alpha + \overline{\alpha}}{2|\alpha|} i \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad z = \frac{\alpha - \overline{\alpha}}{2} - \frac{\alpha + \overline{\alpha}}{2|\alpha|} i$$

【別解】

点Pが虚軸上にあることから $z = pi$ とおける。また、 $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$, $\angle APB = \frac{\pi}{2}$ であることから、

点O, Pは線分ABを直径とする円周上にあるので、線分ABの中点を点Mとすると

PM = MOが成り立つ。すなわち、

$$\begin{aligned} \frac{|\alpha + \beta|}{2} &= \left| pi - \frac{\alpha + \beta}{2} \right| \\ \Leftrightarrow \left| \frac{\alpha + \beta}{2} \right|^2 &= \left| pi - \frac{\alpha + \beta}{2} \right|^2 \\ \Leftrightarrow \frac{(\alpha + \beta) \cdot (\overline{\alpha} + \overline{\beta})}{4} &= \frac{4p^2 + (\alpha + \beta) \cdot (\overline{\alpha} + \overline{\beta}) - 2p(\overline{\alpha} + \overline{\beta})i + 2p(\alpha + \beta)i}{4} \\ \Leftrightarrow 4p^2 - 2p(\overline{\alpha} + \overline{\beta})i + 2p(\alpha + \beta)i &= 0 \\ \Leftrightarrow 2p \left\{ 2p - (\overline{\alpha} + \overline{\beta})i + (\alpha + \beta)i \right\} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2p \left\{ 2p - \left(\overline{\alpha} + \frac{i\overline{\alpha}}{|\alpha|} \right) i + \left(\alpha - \frac{\alpha i}{|\alpha|} \right) i \right\} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2p \left\{ 2p + (\alpha - \overline{\alpha})i + \frac{\alpha + \overline{\alpha}}{|\alpha|} \right\} &= 0 \\ \therefore p &= -\frac{(\alpha + \overline{\alpha})i + \frac{\alpha + \overline{\alpha}}{|\alpha|}}{2} \quad (\because p \neq 0) \end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} z &= pi \\ &= \frac{\alpha - \overline{\alpha}}{2} - \frac{\alpha + \overline{\alpha}}{2|\alpha|} i \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad z = \frac{\alpha - \overline{\alpha}}{2} - \frac{\alpha + \overline{\alpha}}{2|\alpha|} i$$

第3問

(1)

$$\frac{dx}{dt} = n \cos^{n-1} t (-\sin t), \frac{dy}{dt} = 4 \sin^3 t \cos t$$

であり, $t = \frac{\pi}{3}$ で $\frac{dx}{dt} \neq 0$ より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4 \sin^3 t \cos t}{n \cos^{n-1} t (-\sin t)} = -\frac{4 \sin^2 t}{n \cos^{n-2} t}$$

が得られるから ℓ_n の傾きは

$$-\frac{4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2}{n \left(\frac{1}{2} \right)^{n-2}} = -\frac{3 \cdot 2^{n-2}}{n}$$

である。また $t = \frac{\pi}{3}$ にあたる C_n 上の点は $\left(\frac{1}{2^n}, \frac{9}{16} \right)$ であるから, ℓ_n の方程式は

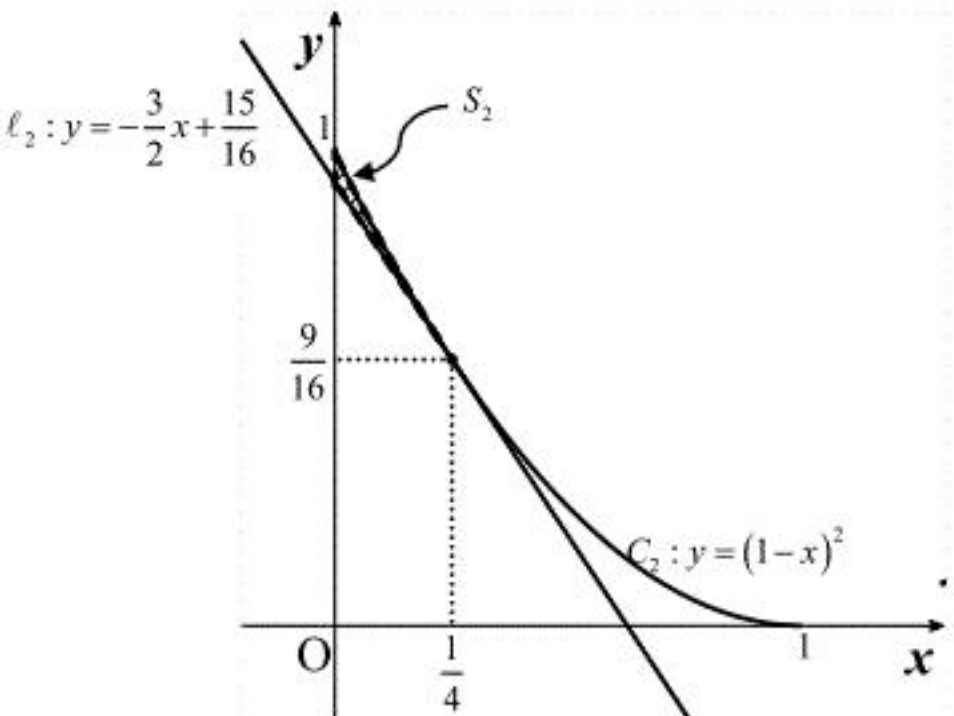
$$\begin{aligned} y &= -\frac{3 \cdot 2^{n-2}}{n} \left(x - \frac{1}{2^n} \right) + \frac{9}{16} \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{3 \cdot 2^{n-2}}{n} x + \frac{3}{4n} + \frac{9}{16} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = -\frac{3 \cdot 2^{n-2}}{n} x + \frac{3}{4n} + \frac{9}{16}$$

(2)

$n=2$ のとき, $y = (1 - \cos^2 t)^2 = (1-x)^2$ であり, $\ell_n: y = -\frac{3}{2}x + \frac{15}{16}$ である。したがって, 考える面積は次のグラフで表される。



よって, 求める面積は

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^{1/4} \left\{ (1-x)^2 - \left(-\frac{3}{2}x + \frac{15}{16} \right) \right\} dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{16} \right]_0^{1/4} \\ &= \frac{1}{192} \end{aligned}$$

である。

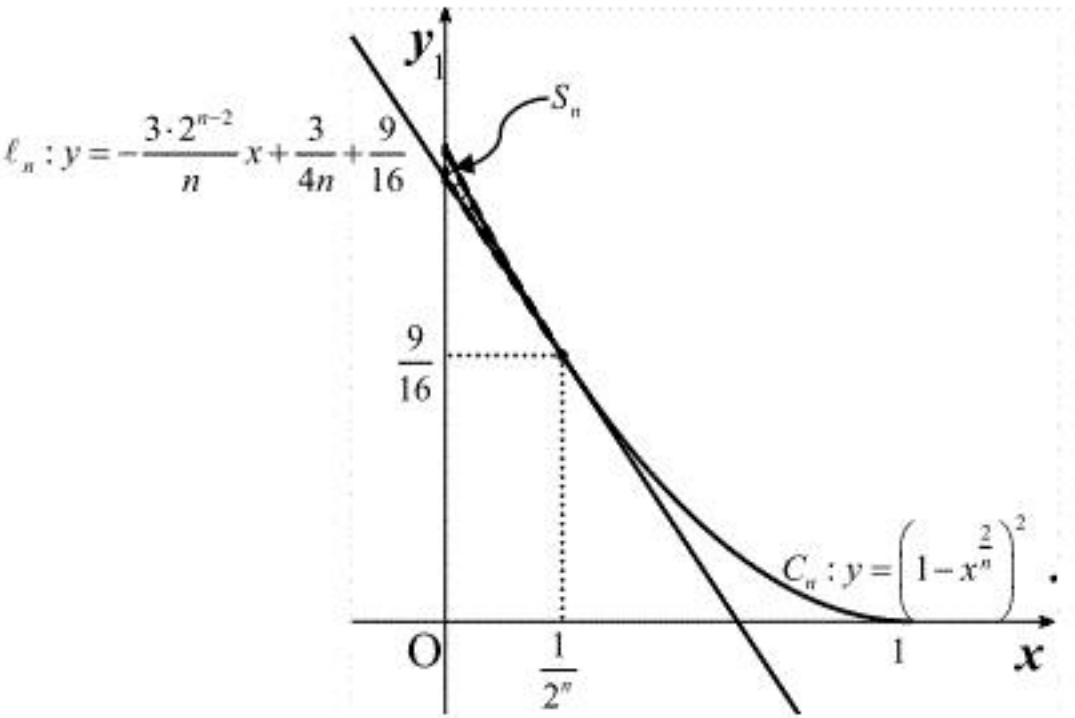
$$(\text{答}) \quad \frac{1}{192}$$

(3)

n は2以上の自然数より, ℓ_n と y 軸の交点の y 座標について

$$\frac{3}{4n} + \frac{9}{16} \leq \frac{3}{8} + \frac{9}{16} < 1$$

が成り立ち, また, C_n と ℓ_n の共有点は接点ただ1つであることから, C_n と ℓ_n は次のグラフで表される関係にある。



また,

$$C_n: y = \sin^4 t = (1 - \cos^2 t)^2 = \left(1 - x^{\frac{n}{2}} \right)^2$$

より, 斜線で示した面積 S_n は

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^{1/2^n} \left\{ \left(1 - x^{\frac{n}{2}} \right)^2 - \left(-\frac{3 \cdot 2^{n-2}}{n} x + \frac{3}{4n} + \frac{9}{16} \right) \right\} dx \\ &= \left[x - \frac{2n}{n+2} x^{\frac{n+2}{2}} + \frac{n}{n+4} x^{\frac{n+4}{2}} + \frac{3 \cdot 2^{n-2}}{2n} x^2 - \frac{3}{4n} x - \frac{9}{16} x \right]_0^{1/2^n} \\ &= \frac{7}{2^{n+4}} - \frac{3}{n \cdot 2^{n+3}} - \frac{n}{(n+2)2^{n+1}} + \frac{n}{(n+4)2^{n+4}} \end{aligned}$$

である。ここで

$$\begin{aligned} 2^n n S_n &= \frac{7}{16} n - \frac{3}{8} - \frac{n^2}{2(n+2)} + \frac{n^2}{16(n+4)} \\ &= \frac{7}{16} n - \frac{3}{8} - \left(\frac{n-2}{2} + \frac{2}{n+2} \right) + \left(\frac{n-4}{16} + \frac{1}{n+4} \right) \\ &= \frac{3}{8} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+4} \end{aligned}$$

であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n n S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{8} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+4} \right) = \frac{3}{8}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{3}{8}$$

第4問

(1)

白玉2個と赤玉3個が入っている箱から2個の玉を同時に取り出すことを考える。すべての玉を区別すると、取り出し方は全部で ${}_5C_2=10$ 通りであり、これらは同様に確からしく起こる。したがって

$$p_0 = \frac{{}_2C_0 \cdot {}_3C_2}{10} = \frac{3}{10}$$

$$p_1 = \frac{{}_2C_1 \cdot {}_3C_1}{10} = \frac{3}{5}$$

$$p_2 = \frac{{}_2C_2 \cdot {}_3C_0}{10} = \frac{1}{10}$$

である。

$$(\text{答}) \quad p_0 = \frac{3}{10}, p_1 = \frac{3}{5}, p_2 = \frac{1}{10}$$

(2)

(1)と同様に考えて

$$p_5 = \frac{{}_nC_5 \cdot {}_mC_{n-5}}{{}_{m+n}C_n}, p_6 = \frac{{}_nC_6 \cdot {}_mC_{n-6}}{{}_{m+n}C_n}$$

であるから、 $p_5 = p_6$ のとき

$${}_nC_5 \cdot {}_mC_{n-5} = {}_nC_6 \cdot {}_mC_{n-6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{5!(n-5)!} \cdot \frac{m!}{(n-5)!(m-n+5)!} = \frac{n!}{6!(n-6)!} \cdot \frac{m!}{(n-6)!(m-n+6)!}$$

$$\Leftrightarrow 6(m-n+6) = (n-5)^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が得られる。①の右辺は平方数であるから、①の左辺も平方数である。6の倍数である平方数は小さい順に $6^2, 6^2 \cdot 2^2, 6^2 \cdot 3^2, \dots$ であるが、 $m > n$ より $m-n+6 > 6$ であることに注意すると、 n が最小となるとき

$$m-n+6 = 6 \cdot 2^2, n-5 = 6 \cdot 2$$

であり、これを解いて $n=17, m=35$ である。

$$(\text{答}) \quad (n, m) = (17, 35)$$

(3)

$d_2 > d_3$ より

$$\left| \frac{n}{n+m} - \frac{2}{n} \right| > \left| \frac{n}{n+m} - \frac{3}{n} \right|$$

両辺とも正だから

$$\left(\frac{n}{n+m} - \frac{2}{n} \right)^2 > \left(\frac{n}{n+m} - \frac{3}{n} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{n+m} > \frac{5}{n^2}$$

$$\Leftrightarrow m < \frac{2}{5}n^2 - n \quad \cdots \textcircled{2}$$

が得られる。ここで、 $n < m$ であるから、 m が存在するためには

$$n < \frac{2}{5}n^2 - n \Leftrightarrow \frac{2}{5}n(n-5) > 0$$

$$\therefore n > 5 \quad (\because n > 0)$$

が必要である。また、(1)と同様に考えて

$$p_2 = \frac{{}_nC_2 \cdot {}_mC_{n-2}}{{}_{m+n}C_n}, p_3 = \frac{{}_nC_3 \cdot {}_mC_{n-3}}{{}_{m+n}C_n}$$

であるから、 $p_2 > p_3$ のとき

$${}_nC_2 \cdot {}_mC_{n-2} > {}_nC_3 \cdot {}_mC_{n-3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} \cdot \frac{m!}{(n-2)!(m-n+2)!} > \frac{n!}{3!(n-3)!} \cdot \frac{m!}{(n-3)!(m-n+3)!}$$

$$\Leftrightarrow 3(m-n+3) > (n-2)^2$$

$$\Leftrightarrow m > \frac{n^2 - n - 5}{3} \quad \cdots \textcircled{3}$$

が得られる。以下、小さい n から順にこれらの条件を満たす n, m を検討する。

[1] $n=6$ のとき

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{より}, \frac{25}{3} < m < \frac{42}{5} \text{であるが, これを満たす自然数 } m \text{ は存在しない。}$$

[2] $n=7$ のとき

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{より}, \frac{37}{3} < m < \frac{63}{5} \text{であるが, これを満たす自然数 } m \text{ は存在しない。}$$

[3] $n=8$ のとき

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{より}, 17 < m < \frac{88}{5} \text{であるが, これを満たす自然数 } m \text{ は存在しない。}$$

[4] $n=9$ のとき

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{より}, \frac{67}{3} < m < \frac{117}{5} \text{であり, これを満たす自然数 } m \text{ は } m=23 \text{ である。}$$

以上より、求める自然数の組は $(n, m) = (9, 23)$ である。

$$(\text{答}) \quad (n, m) = (9, 23)$$