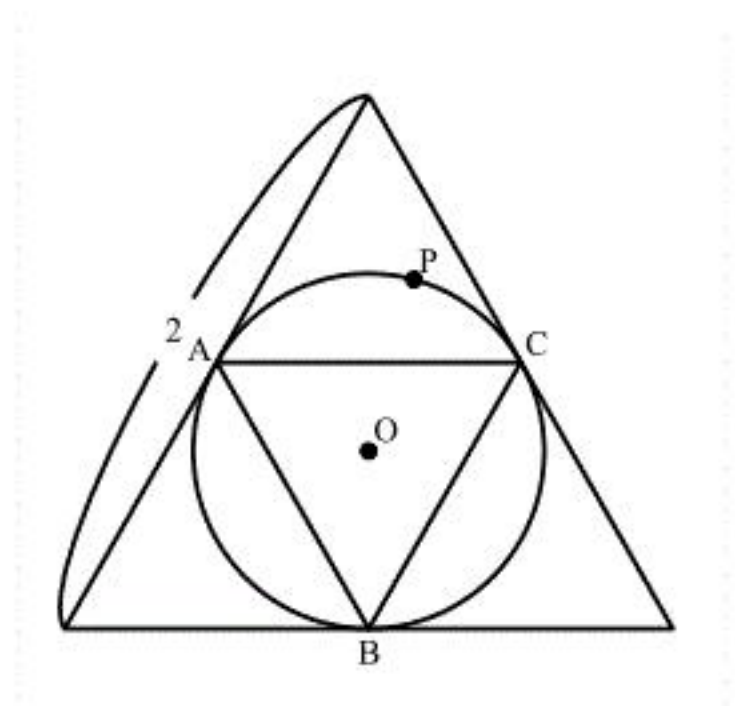


第1問

(1)



OA は1辺の長さが2 の正三角形の内接円の半径であるから、正三角形の面積について考えると

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot (2+2+2) \cdot OA$$

$$\therefore OA = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

が得られる。

(答) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(2)

対称性から、3点 A, B, C は正三角形の各辺の中点と分かるから、 $\triangle ABC$ は正三角形である。
よって点 O は $\triangle ABC$ の重心となるから

$$\frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

および

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cos 120^\circ = -\frac{1}{6}$$

が成り立つ。よって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} &= (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}) = -\frac{1}{6} - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OP} + |\overrightarrow{OP}|^2 \\ \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} &= (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}) = -\frac{1}{6} - (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{OP} + |\overrightarrow{OP}|^2 \\ \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PA} &= (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}) \cdot (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP}) = -\frac{1}{6} - (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{OP} + |\overrightarrow{OP}|^2 \end{aligned}$$

となるから、 $|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{OA}| = \frac{\sqrt{3}}{3}$ であることと合わせて、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PA} &= \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot 3 - 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{OP} + 3|\overrightarrow{OP}|^2 \\ &= -\frac{1}{2} - 2 \cdot \vec{0} \cdot \overrightarrow{OP} + 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{1}{2}$

(3)

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 + |\overrightarrow{PC}|^2 &= |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP}|^2 + |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}|^2 + |\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}|^2 \\ &= |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 + 3|\overrightarrow{OP}|^2 - 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{OP} \\ &= 6 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \vec{0} \cdot \overrightarrow{OP} \\ &= 2 \end{aligned}$$

である。

(答) 2

(4)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} &= -\frac{1}{6} - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OP} + |\overrightarrow{OP}|^2 \\ &= -\frac{1}{6} - (\vec{0} - \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{OP} + \frac{1}{3} \\ &= \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OP} + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

である。ここで $\overrightarrow{OC}$ と $\overrightarrow{OP}$ のなす角を $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ とすると、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} &= \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OP} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \theta + \frac{1}{6} \\ &= \frac{\cos \theta}{3} + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

と表せる。 $0 \leq \theta \leq \pi$ より $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ であるから、 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ は $\cos \theta = 1$ のときに最大値

$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ 、 $\cos \theta = -1$ のときに最小値 $-\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$ をとる。

(答) 最大値： $\frac{1}{2}$ 、最小値： $-\frac{1}{6}$

第2問

(1)

$$\begin{aligned}(n+1)(3n^{-1}+2)(n^2-n+1) &= (3n^{-1}+2)(n^3+1) \\ &= 2n^3+3n^2+2+3n^{-1}\end{aligned}$$

である。 $n \geq 4$ であるから、これを n 進数で表すと $2302.3_{(n)}$ となる。

(答) $2302.3_{(n)}$

(2)

$21201_{(3)} = 320_{(n)}$ を10進数に変換すると

$$\begin{aligned}2 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 &= 3 \cdot n^2 + 2 \cdot n^1 + 0 \cdot n^0 \\ \Leftrightarrow 3n^2 + 2n - 208 &= 0 \\ \Leftrightarrow (3n+26)(n-8) &= 0\end{aligned}$$

が得られる。 n は4以上の整数だから、 $n=8$ である。

(答) 8

(3)

$abc_{(7)}$ が7進数で3桁の数であり、 $acb_{(8)}$ が8進数で3桁の数であるから、 a, b, c は

$$1 \leq a \leq 6, 0 \leq b \leq 6, 0 \leq c \leq 6 \quad \dots \textcircled{1}$$

を満たす整数である。いま、正の整数 N に関して

$$\begin{cases} 3N = a \cdot 7^2 + b \cdot 7^1 + c \cdot 7^0 \\ 4N = a \cdot 8^2 + c \cdot 8^1 + b \cdot 8^0 \end{cases}$$

が成り立つから、これら2式から N を消去すると

$$4a + 25b - 20c = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

が得られる。ここで、②を変形すると

$$4a = 5(-5b + 4c)$$

となるから、4, 5が互いに素であることより、 a が5の倍数であると分かる。よって①から

$$a = 5$$

となる。一方、②を

$$25b = 4(-a + 5c)$$

と変形すると、4, 25が互いに素であることより、 b が4の倍数であると分かる。よって①から

$$b = 0, 4$$

となる。②より $b=0$ のときは $c=1$ 、 $b=4$ のときは $c=6$ となり、これらは①を満たす。以上より

$$(a, b, c) = (5, 0, 1), (5, 4, 6)$$

と分かる。 $N = \frac{1}{3}(49a + 7b + c)$ より計算すると、 $(a, b, c) = (5, 0, 1)$ のときは $N = 82$,

$(a, b, c) = (5, 4, 6)$ のときは $N = 93$ となる。

(答) $(a, b, c) = (5, 0, 1)$ のとき $N = 82$, $(a, b, c) = (5, 4, 6)$ のとき $N = 93$

第3問

- (1) $x > 0$ において $f(x) = a\sqrt[n]{x} - \log x$ と定義すると

$$f'(x) = \frac{a}{n} x^{\frac{1}{n}-1} - \frac{1}{x} = \frac{a}{nx} \left(x^{\frac{1}{n}} - \frac{n}{a} \right)$$

であるから、次の増減表が得られる。

x	(0)	$\cdots$	$\left(\frac{n}{a}\right)^n$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$			$n - n \log \frac{n}{a}$	

すべての $x > 0$ に対して $\log x \leq a\sqrt[n]{x} \Leftrightarrow f(x) \geq 0$ が成り立つ条件は、増減表より

$$n - n \log \frac{n}{a} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow n \left(\log \frac{n}{a} - 1 \right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{n}{a} \leq e \quad (\because n > 0)$$

$$\therefore a \geq \frac{n}{e}$$

と分かる。この条件を満たす正の定数 a の n 最小値は、 $a_n = \frac{n}{e}$ である。

(答) $\frac{n}{e}$

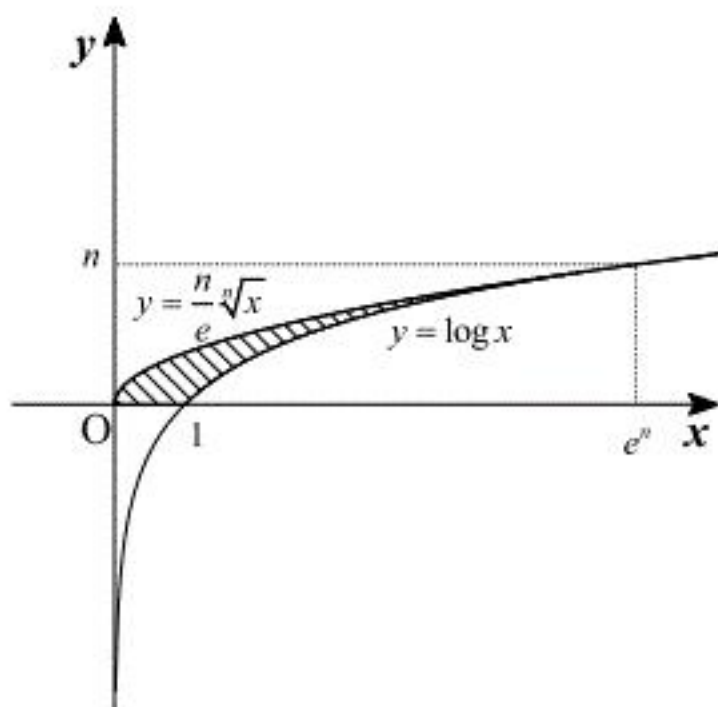
- (2) (1)の増減表より、 $\log x = a_n \sqrt[n]{x}$ をみたす x は

$$x = \left(\frac{n}{a_n} \right)^n = e^n$$

である。

(答) e^n

- (3) 2つの曲線 $y = \log x$, $a_n \sqrt[n]{x}$ および x 軸で囲まれた部分は、下図の斜線部のようになる。



よってこの領域の面積 S_n は

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^{e^n} \frac{n}{e} \sqrt[n]{x} dx - \int_1^{e^n} \log x dx \\ &= \left[\frac{n^2}{e(n+1)} x^{\frac{n+1}{n}} \right]_0^{e^n} - [x \log x]_1^{e^n} + \int_1^{e^n} 1 \cdot dx \\ &= \frac{n^2}{n+1} e^n - ne^n + [x]_1^{e^n} \\ &= \frac{e^n}{n+1} - 1 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{e^n}{n+1} - 1$

- (4) (3)より

$$\frac{\log(1+S_n)}{n} = \frac{\log \frac{e^n}{n+1}}{n} = \frac{\log e^n - \log(n+1)}{n} = 1 - \frac{\log(n+1)}{n}$$

となる。ここで、 $x > 0$ に対して $\log x \leq \frac{2}{e} \sqrt{x}$ が成り立つことを利用すると、 $n+1 > 1$ より

$$0 < \log(n+1) \leq \frac{2}{e} \sqrt{n+1}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{\frac{2}{e} \sqrt{n+1}}{n} \leq 1 - \frac{\log(n+1)}{n} < 1 - \frac{0}{n}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{2}{e} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \leq \frac{\log(1+S_n)}{n} < 1$$

が得られる。ここで、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{e} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \right) = 1$ であるから、はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1+S_n)}{n} = 1$$

と分かる。

(答) 1

第4問

(1)

1個のさいころを投げて出る目6通りは同様に確からしいから、さいころを1回投げた時の得点とその確率は次の表のとおりになる。

得点	1	2	3	5
確率	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

さいころを2回投げたときに得点の合計が6になるのは、各回の得点の組み合わせが(1, 5), (3, 3)のときである。よって求める確率は

$${}_2C_1 \cdot \left(\frac{2}{6}\right) \cdot \left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{2}{6}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

である。

(答) $\frac{2}{9}$

(2)

さいころを4回投げたときに得点の合計が10になるのは、各回の得点の組み合わせが(5, 3, 1, 1), (5, 2, 2, 1), (3, 3, 3, 1), (3, 3, 2, 2)のときである。よって求める確率は

$$\frac{4!}{2!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{2}{6}\right) \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 + \frac{4!}{2!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{6}\right) + \frac{4!}{3!} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{6}\right) + \frac{4!}{2!2!} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{13}{81}$$

である。

(答) $\frac{13}{81}$

(3)

2回目に5または6の目が出る確率は $\frac{1}{3}$ である。ここで、2回目に5または6の目が出て、かつ得点が10になる確率を考える。

[1] 2回目に5が出るとき

他3回の試行での得点の組み合わせは、(3, 1, 1), (2, 2, 1)であるから、2回目に5が出て得点が10になる確率は

$$\frac{1}{6} \cdot \left\{ \frac{3!}{2!} \cdot \left(\frac{2}{6}\right) \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 + \frac{3!}{2!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{6}\right) \right\} = \frac{5}{216}$$

である。

[2] 2回目に6が出るとき

他3回の試行での得点の組み合わせは、(5, 1, 1), (3, 3, 1), (2, 2, 3)であるから、2回目に6が出て得点が10になる確率は

$$\frac{1}{6} \cdot \left\{ \frac{3!}{2!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 + \frac{3!}{2!} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{6}\right) + \frac{3!}{2!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{6}\right) \right\} = \frac{7}{216}$$

である。

以上, [1], [2]より、2回目に5または6の目が出て、かつ得点の合計が10になる確率は

$$\frac{5}{216} + \frac{7}{216} = \frac{1}{18}$$

となるから、2回目に5または6の目が出たときに得点の合計が10になる条件付き確率は

$$\frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{6}$$

である。

(答) $\frac{1}{6}$