

第1問

(1)

$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ を変形すると、

$$\begin{aligned}\sqrt{x+1}-\sqrt{x} &= \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \\ &= \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\end{aligned}$$

であるから、 $\sqrt{x+1} > \sqrt{x} > 0$ より、

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}} &< \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x+1}} &< \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x+1}} &< \sqrt{x+1}-\sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(2)

(1)より $\sqrt{x+1}-\sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}}$ であるから、 $x=1, 2, \dots, n$ について辺々足し合わせると、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) &< \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\sqrt{k}} \\ \Leftrightarrow 2\{(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\dots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\} &< \frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}} \\ \Leftrightarrow 2(\sqrt{n+1}-1) &< S_n\end{aligned}$$

となる。また、 $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} < \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ であるから、 $n \geq 2$ において、 $x=1, 2, \dots, n-1$ について辺々足し合わせると、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2\sqrt{k+1}} &< \sum_{k=1}^{n-1} (\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}} &< 2\{(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\dots+(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})\} \\ \Leftrightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}} &< 1+2(\sqrt{n}-1) \\ \Leftrightarrow S_n &< 2\sqrt{n}-1\end{aligned}$$

となる。以上より、 $n \geq 2$ のとき $2(\sqrt{n+1}-1) < S_n < 2\sqrt{n}-1$ が成り立つ。

(証明終)

(3)

(2)より、

$$\begin{aligned}2(\sqrt{n+1}-1) &< S_n < 2\sqrt{n}-1 \\ \Leftrightarrow \frac{2(\sqrt{n+1}-1)}{\sqrt{n}} &< \frac{S_n}{\sqrt{n}} < \frac{2\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}} \quad (\because \sqrt{n} > 0) \\ \Leftrightarrow 2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{\frac{1}{n}}\right) &< \frac{S_n}{\sqrt{n}} < 2-\frac{1}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{\frac{1}{n}}\right) \right\} &= 2(\sqrt{1+0}-\sqrt{0}) = 2 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2-\frac{1}{\sqrt{n}} \right) &= 2-0 = 2\end{aligned}$$

であるから、はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = 2$$

となる。

(答) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = 2$

第2問

(1)

$0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ より、点 Q が点 P と一致することはない。ここで、

$$\begin{aligned}OP &= \sqrt{2} \\OQ &= \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} \\PQ &= \sqrt{(x-1)^2 + \left(\frac{1}{x}-1\right)^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}\end{aligned}$$

であるから、 $\triangle OPQ$ について余弦定理を用いると、

$$\begin{aligned}PQ^2 &= OP^2 + OQ^2 - 2OP \cdot OQ \cos \angle POQ \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} &= 2 + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\sqrt{2}\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} \cos \theta \\ \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} &= \sqrt{2}\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} \cos \theta \qquad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。 $\textcircled{1}$ は $x > 0, \cos \theta > 0 \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{4} \right)$ より両辺正であるから、両辺 2 乗すると、

$$\begin{aligned}x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} &= 2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \cos^2 \theta \\ \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) (2 \cos^2 \theta - 1) &= 2 \\ \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \cos 2\theta &= 2 \\ \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} &= \frac{2}{\cos 2\theta} \left(\because 0 < 2\theta < \frac{\pi}{2} \right)\end{aligned}$$

が成り立つことがわかる。

(証明終)

(2)

直線 OQ は原点を通る傾き正の直線であるから、その方程式は実数 $k (> 0)$ を用いて、

$$y = kx$$

と書くことができる。直線 OQ と曲線 $y = \frac{1}{x}$ の $x > 0$ における共有点は、

$$kx = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{k} \quad (x > 0)$$

より、点 Q ただ 1 つであることが分かる。また、曲線 $y = \frac{1}{x}$ は $y = x$ に関して対称であるから、

直線 OQ の $y = x$ に関して対称な直線を考えることにより、 $\angle POQ = \theta$ を満たす点 Q はちょうど 2 個あることがわかる。

(証明終)

2 個の点 Q を Q_1, Q_2 とおくと、対称性から $OQ_1 = OQ_2$ となる。さらに、

$$\angle Q_1 O Q_2 = \angle Q_1 O P + \angle P O Q_2 = \theta + \theta = 2\theta = \frac{\pi}{3}$$

であるから $\triangle Q_1 O Q_2$ は正三角形である。したがって、(1) と合わせて、

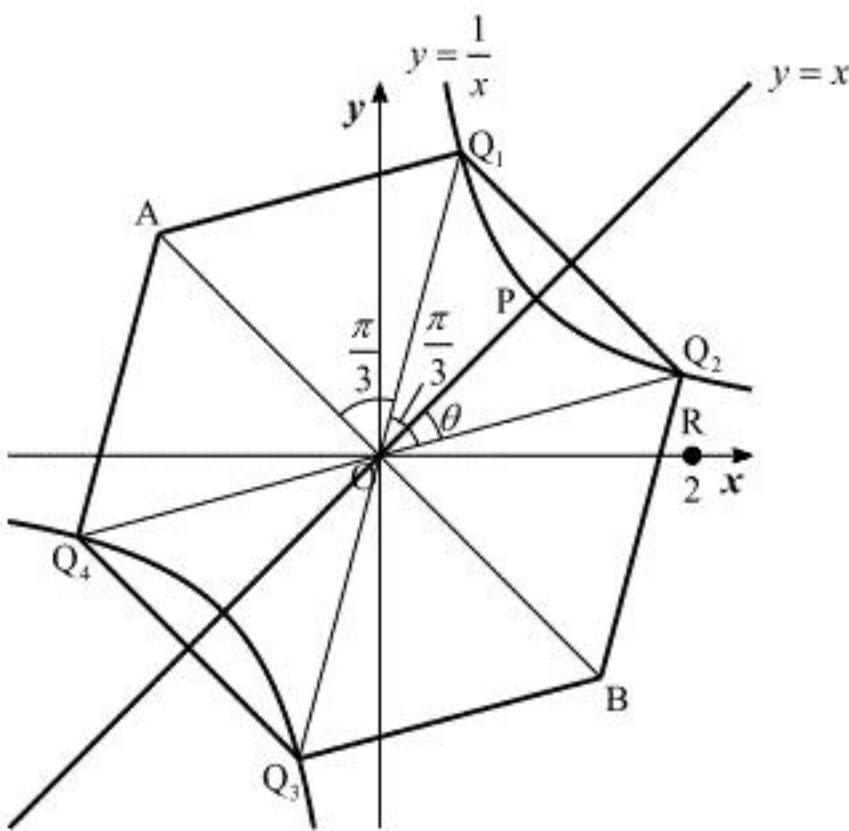
$$Q_1 Q_2 = OQ_1 = \sqrt{\frac{1}{x^2} + x^2} = \sqrt{\frac{2}{\cos 2\theta}} = \sqrt{\frac{2}{\cos \frac{\pi}{3}}} = 2$$

となる。

(答) 2

(3)

以下に、正六角形 $AQ_1Q_2BQ_3Q_4$ を図示する。



正六角形であるから、 $\triangle \triangle OQ_1Q_2$ は正三角形、すなわち $\angle Q_1 O Q_2 = \frac{\pi}{3}$ である。(2) より、点 Q_1, Q_2 はそれぞれ直線 $y = x$ に関して対称な位置にあるから、対称性より、

$$\theta = \frac{1}{2} \angle Q_1 O Q_2 = \frac{\pi}{6}$$

となることがわかる。

(証明終)

また、(2) より $\theta = \frac{\pi}{6}$ となるとき $OQ_1 = 2$ であるから、正六角形の外接円は原点を中心とした半径 2 の円となる。外接円と x 軸の正の部分の交点を $R(2, 0)$ とする。ここで、直線 $y = x$ と x 軸のなす角は $\frac{\pi}{4}$ であるから、

$$\angle Q_1 O R = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$$

である。したがって、図より、

$$\angle A O R = \angle Q_1 O R + 2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{3}{4} \pi$$

が得られるから、点 A の座標は

$$\left(2 \cos \frac{3}{4} \pi, 2 \sin \frac{3}{4} \pi \right) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

となる。正六角形 $AQ_1Q_2BQ_3Q_4$ は直線 $y = x$ に関して対称な図形であるから、点 B も点 A を直線 $y = x$ に関して対称移動させたものであるから、点 B の座標は $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ となる。

(答) 点 A $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 、点 B $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

第3問

(1)

$f(x)=e^{3x}$ とおくと $f'(x)=3e^{3x}$ であるから、曲線 C の点 (t, e^{3t}) における接線の方程式は、

$$\begin{aligned}y &= f'(t)(x-t)+f(t) \\ \Leftrightarrow y &= 3e^{3t}(x-t)+e^{3t} \\ \Leftrightarrow y &= 3e^{3t}x+(1-3t)e^{3t}\end{aligned}$$

となる。また、法線の方程式は、 $f'(x)\neq 0$ であるから、

$$\begin{aligned}y &= -\frac{1}{f'(t)}(x-t)+f(t) \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{1}{3e^{3t}}(x-t)+e^{3t} \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{1}{3e^{3t}}x+\frac{1}{3e^{3t}}(t+3e^{6t})\end{aligned}$$

となる。接線の方程式に $y=0$ を代入すると、

$$\begin{aligned}0 &= 3e^{3t}x+(1-3t)e^{3t} \\ \Leftrightarrow 3x &= 3t-1 \left(\because e^{3t} > 0 \right) \\ \Leftrightarrow x &= t-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

となるから、 $a=t-\frac{1}{3}$ すなわち $Q\left(t-\frac{1}{3}, 0\right)$ である。法線の方程式に $y=0$ を代入すると、

$$\begin{aligned}0 &= -\frac{1}{3e^{3t}}x+\frac{1}{3e^{3t}}(t+3e^{6t}) \\ \Leftrightarrow x &= t+3e^{6t} \left(\because \frac{1}{3e^{3t}} > 0 \right)\end{aligned}$$

となるから、 $b=t+3e^{6t}$ すなわち $R(t+3e^{6t}, 0)$ である。以上より、

$$\begin{aligned}\text{PQ}:\text{PR} &= e:9 \\ \Leftrightarrow e\text{PR} &= 9\text{PQ} \\ \Leftrightarrow e^2\text{PR}^2 &= 81\text{PQ}^2 \left(\because \text{PR} > 0, \text{PQ} > 0 \right) \\ \Leftrightarrow e^2 \left[\left\{ t-(t+3e^{6t}) \right\}^2 + \left(e^{3t}-0 \right)^2 \right] \\ &= 81 \left[\left\{ t-\left(t-\frac{1}{3} \right) \right\}^2 + \left(e^{3t}-0 \right)^2 \right] \\ \Leftrightarrow e^2 \left(9e^{12t}+e^{6t} \right) &= 81 \left(\frac{1}{9}+e^{6t} \right) \\ \Leftrightarrow e^{6t+2} &= 9 \left(\because 9e^{6t}+1 > 0 \right) \\ \Leftrightarrow 6t+2 &= 2\log 3 \\ \therefore t &= \frac{\log 3-1}{3}\end{aligned}$$

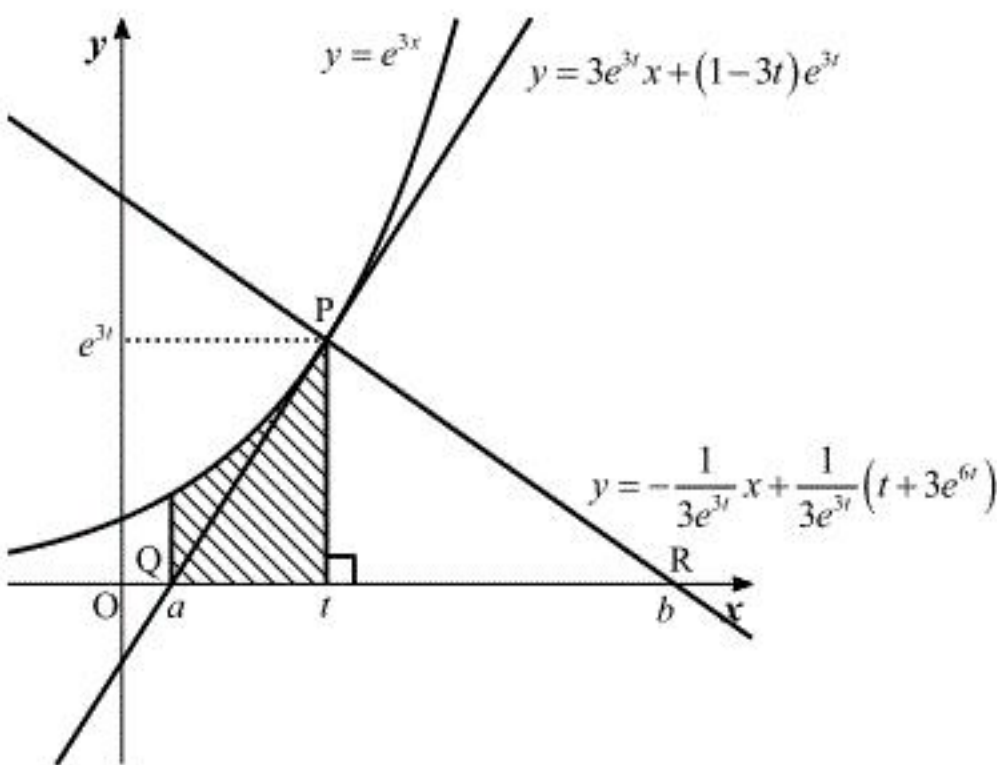
となる。

$$\text{(答)} \quad t=\frac{\log 3-1}{3}$$

(2)

以下に、曲線 $y=e^{3x}$ 、直線 $y=3e^{3t}x+(1-3t)e^{3t}$ 、直線 $y=-\frac{1}{3e^{3t}}x+\frac{1}{3e^{3t}}(t+3e^{6t})$ を図示する。

$S(t)$ は図の斜線部の部分となる。



上図より、 $S(t)$ は、

$$S(t)=\int_a^te^{3x}dx=\left[\frac{1}{3}e^{3x}\right]_a^t=\frac{1}{3}(e^{3t}-e^{3t-1})=\frac{e^{3t-1}}{3}(e-1)$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}S(t) &= e-1 \\ \Leftrightarrow \frac{e^{3t-1}}{3}(e-1) &= e-1 \\ \Leftrightarrow e^{3t-1} &= 3 \left(\because e-1 > 0 \right) \\ \Leftrightarrow 3t-1 &= \log 3 \\ \therefore t &= \frac{\log 3+1}{3}\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad t=\frac{\log 3+1}{3}$$

(3)

(2)の図より、

$$\begin{aligned}\text{T}(t) &= \frac{1}{2}(b-a)e^{3t} \\ &= \frac{1}{2}\left\{ (t+3e^{6t})-\left(t-\frac{1}{3} \right) \right\} \cdot e^{3t} \\ &= \frac{e^{3t}(9e^{6t}+1)}{6}\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\frac{e^{6t}S(t)}{\text{T}(t)}=\frac{e^{6t}\cdot\frac{e^{3t-1}}{3}(e-1)}{\frac{e^{3t}(9e^{6t}+1)}{6}}=2\left(1-\frac{1}{e}\right)\left(\frac{1}{9+\frac{1}{e^{6t}}}\right)$$

であるから、

$$\begin{aligned}\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{e^{6t}S(t)}{\text{T}(t)} &= \lim_{t\rightarrow\infty}\left\{ 2\left(1-\frac{1}{e}\right)\left(\frac{1}{9+\frac{1}{e^{6t}}}\right) \right\} \\ &= 2\left(1-\frac{1}{e}\right)\left(\frac{1}{9+0}\right)=\frac{2}{9}\left(1-\frac{1}{e}\right)\end{aligned}$$

となる。

第4問

(1)

1回目の勝負で優勝者が決まるのは、 n 人がさいころを振って2種類の目を出し、そのうち出た目が大きい方を1人だけが出す場合である。優勝者の選び方が n 通り、2種類の目の選び方が ${}_6C_2$ 通り、それぞれのサイコロの目が出る確率は同様に確からしく $\frac{1}{6}$ であるから、求める確率は

$$n \cdot {}_6C_2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{15n}{6^n}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{15n}{6^n}$$

(2)

敗退者が出る場合は、出た目が2種類の場合のみである。 n 人がある2種類の目のどちらかを出す確率は $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ であり、全員がそのうち1種類の目のみを出す確率は $2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n$ である。よって、 n 人で2種類の目を出す確率は、

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n - 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

である。2種類の目の選び方が ${}_6C_2$ 通りであるから、敗退者が出る確率は、

$${}_6C_2 \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^n - 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n \right\} = \frac{15(2^n - 2)}{6^n}$$

となる。したがって、求める確率はこの余事象であるから、

$$1 - \frac{15(2^n - 2)}{6^n}$$

である。

$$(\text{答}) \quad 1 - \frac{15(2^n - 2)}{6^n}$$

(3)

1回目に k 人($k=2, 3, \dots, n-1$)が勝ち残り、2回目で優勝者が決まる確率を考える。1回目について考えると、勝ち残る人の選び方が ${}_nC_k$ 通り、2種類の目の選び方が ${}_6C_2$ 通り、その目を n 人が出す確率が $\left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-k} = \left(\frac{1}{6}\right)^n$ である。2回目について考えると、勝ち残る人の選び方が ${}_kC_1 = k$ 通り、2種類の目の選び方が ${}_6C_2$ 通り、その目を k 人が出す確率が $\left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{k-1} = \left(\frac{1}{6}\right)^k$ である。よって、1回目に k 人が勝ち残り、2回目で優勝者が決まる確率は、

$${}_nC_k \cdot {}_6C_2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n \cdot k \cdot {}_6C_2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k = \frac{225}{6^{n+1}} \cdot k \cdot {}_nC_k \left(\frac{1}{6}\right)^{k-1} \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。ここで、右辺の $k=0$ は定数項であることに注意して $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k x^k$ の両辺を x で微分すると、

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n k \cdot {}_nC_k x^{k-1}$$

となる。これより、求める確率は①を $k=2, 3, \dots, n-1$ について足し合わせたものだから、

$$\begin{aligned} & \sum_{k=2}^{n-1} \left\{ \frac{225}{6^{n+1}} \cdot k \cdot {}_nC_k \left(\frac{1}{6}\right)^{k-1} \right\} \\ &= \frac{225}{6^{n+1}} \sum_{k=2}^{n-1} \left\{ k \cdot {}_nC_k \left(\frac{1}{6}\right)^{k-1} \right\} \\ &= \frac{225}{6^{n+1}} \left[\sum_{k=1}^n \left\{ k \cdot {}_nC_k \left(\frac{1}{6}\right)^{k-1} \right\} - 1 \cdot {}_nC_1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{1-1} - n \cdot {}_nC_n \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \right] \\ &= \frac{225}{6^{n+1}} \left\{ n \left(1 + \frac{1}{6}\right)^{n-1} - n - \frac{n}{6^{n-1}} \right\} \\ &= \frac{225n(7^{n-1} - 6^{n-1} - 1)}{6^{2n}} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{225n(7^{n-1} - 6^{n-1} - 1)}{6^{2n}}$$