

第1問

(1)

与式から

$$\begin{aligned} f(4) &= 4^2(4^2+8) \\ &= 384 \\ &= 2^7 \cdot 3 \end{aligned}$$

である。したがって $f(4)$ の正の約数の個数は

$$(7+1)(1+1)=16$$

より16個である。

(答) 16 個

(2)

$$\begin{aligned} f(n) &= n^2(n^2+8) \\ &= n^2(n^2-1+9) \\ &= (n-1)n^2(n+1)+9n^2 \end{aligned}$$

となる。ここで $n-1, n, n+1$ は連続する3整数であり、いずれか1つは3の倍数であるから $(n-1)n^2(n+1)$ は3の倍数となる。また、 $9n^2$ も3の倍数であるから $f(n)$ は3の倍数である。

(証明終)

(3)

10 を素因数分解すると

$$10 = 2 \cdot 5 \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}$$

である。ここで、 $f(n)$ が3つ以上の異なる素数で割りきれると仮定する。このとき、 $f(n)$ の正の約数の個数は2以上の整数を3つ以上かけたものであるから、 $\textcircled{1}$ と矛盾する。よって、 $f(n)$ の正の約数の個数が10個になることはない。したがって、 $f(n)$ の異なる素因数の数は高々2つであり、 p, q を異なる素数として

$$f(n) = p^9 \text{ または } f(n) = p^4 \cdot q$$

のいずれかである。

[1] $f(n) = p^9$ のとき

(2)より、 $f(n)$ は3の倍数であるから、 $p=3$ である。よって、

$$f(n) = n^2(n^2+8) = 3^9$$

となる。

[i] n が3で割り切れないとき

$f(n)$ は3以外の素因数を持たないことから、 $n=1$ となるが、 $f(1)=9$ となり、不適である。

[ii] n が3で割り切れるとき

n^2 は3の倍数で、8が3の倍数でないことから、 n^2+8 は3で割り切れない。また、 $n^2+8 \geq 17$ より、 $n^2+8 \neq 1$ であるから、 $f(n)$ は3以外の素因数を持つので不適である。

[2] $f(n) = p^4 \cdot q$ のとき

(2)より、 $f(n)$ が3の倍数であるから p, q のうち1つは3である。

[i] $p=3$ のとき

$$n^2(n^2+8) = 3^4 \cdot q$$

となる。ここで、 n^2, n^2+8 について、差が8であるから、ともに3の倍数であることはない。よって、 n^2 が平方数であること、 $n^2 < n^2+8$ であることを考えると、

$$(n^2, n^2+8) = (1, 3^4q), (3^4, q)$$

に限られる。

[a] $(n^2, n^2+8) = (1, 3^4q)$ のとき

$$n^2 = 1$$

となるが、このとき

$$n^2+8 = 3^4q$$

$$\therefore 1 = 3^2q$$

となり、これは不適である。

[b] $(n^2, n^2+8) = (3^4, q)$ のとき

$$n^2 = 81$$

$$\therefore n = 9 \quad (\because n > 0)$$

となる。このとき、

$$n^2+8 = q$$

$$\therefore q = 89$$

となり、 q が素数であることを満たす。

[ii] $q=3$ のとき

$$n^2(n^2+8) = p^4 \cdot 3$$

となる。 n^2 が平方数であることから、 n は1, p, p^2 のいずれかである。 $n=1$ のときは、 $1 \cdot 9 = p^4 \cdot 3 \Leftrightarrow p^4 = 3$ となるが、これを満たす p は存在せず不適である。 $n=p$ のときは

$$p^2(p^2+8) = 3p^4$$

$$\Leftrightarrow p^2+8 = 3p^2 \quad (\because p \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow p^2 = 4$$

$$\therefore p = 2 \quad (\because p > 0)$$

となり、 p が素数であることを満たす。このとき、 $n=2$ となる。また、 $n=p^2$ のときは

$$p^4(p^4+8) = 3p^4$$

$$\Leftrightarrow p^4 = -5$$

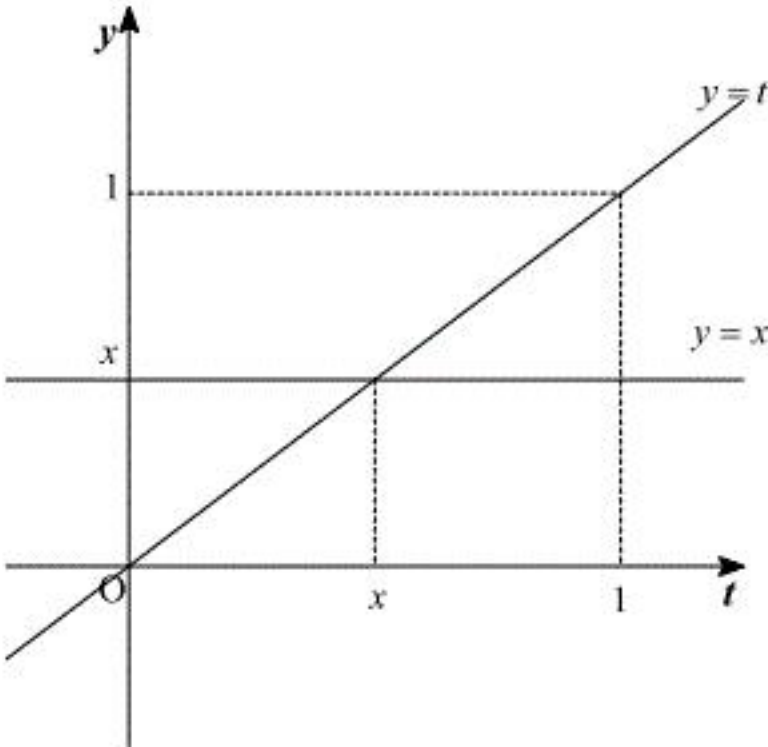
となり、これを満たす p は存在せず不適である。

以上[1], [2]より、 $n=2, 9$ である。

(答) $n=2, 9$

第 2 問

(1)



グラフより $0 < x < 1$ のとき

$$\begin{aligned}\int_0^1 |t-x| dt &= \int_0^x (-t+x) dt + \int_x^1 (t-x) dt \\ &= \left[-\frac{t^2}{2} + xt \right]_0^x + \left[\frac{t^2}{2} - xt \right]_x^1 \\ &= x^2 - x + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。

(答) $x^2 - x + \frac{1}{2}$

(2)

$\frac{1}{2} < a_n < 1$ が成立することを数学的帰納法で証明する。

[1] $n=1$ のとき

$a_1 = \alpha$ で、 $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ であるから、 $\frac{1}{2} < a_n < 1$ は $n=1$ のとき成り立つ。

[2] $n=k$ のとき

このとき、 $\frac{1}{2} < a_n < 1$ が成立することを仮定する。つまり、 $\frac{1}{2} < a_k < 1$ が成り立つ。(1)の結果から

$$\begin{aligned}a_{k+1} &= 2 \int_0^1 |t-a_k| dt \\ &= 2 \left(a_k^2 - a_k + \frac{1}{2} \right) \\ &= 2a_k^2 - 2a_k + 1 \\ &= 2 \left(a_k - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。 $\frac{1}{2} < a_k < 1$ のとき、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &< 2 \left(a_k - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} < 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &< a_{k+1} < 1\end{aligned}$$

となるから、 $\frac{1}{2} < a_n < 1$ は $n=k+1$ のときも成り立つ。

以上[1], [2]より、 $\frac{1}{2} < a_n < 1$ はすべての自然数 n に対して成り立つ。

(証明終)

(3)

(2)より、 $a_{n+1} = 2a_n^2 - 2a_n + 1$ となるから

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= 2a_n^2 - 2a_n + 1 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - \frac{1}{2} &= 2 \left(a_n - \frac{1}{2} \right)^2\end{aligned}$$

となる。 $\frac{1}{2} < a_n < 1$ より、 $a_n - \frac{1}{2} > 0$ であるから、両辺の自然対数をとると

$$\begin{aligned}\log \left(a_{n+1} - \frac{1}{2} \right) &= \log \left\{ 2 \left(a_n - \frac{1}{2} \right)^2 \right\} \\ \Leftrightarrow \log \left(a_{n+1} - \frac{1}{2} \right) &= \log 2 + 2 \log \left(a_n - \frac{1}{2} \right)\end{aligned}$$

となる。 $b_n = \log \left(a_n - \frac{1}{2} \right)$ より、

$$\begin{aligned}b_{n+1} &= 2b_n + \log 2 \\ \Leftrightarrow b_{n+1} + \log 2 &= 2(b_n + \log 2)\end{aligned}$$

となる。よって、数列 $\{b_n + \log 2\}$ は、初項 $b_1 + \log 2 = \log \left(a_1 - \frac{1}{2} \right) + \log 2 = \log(2\alpha - 1)$ 、公比 2 の等比数列であるから、

$$\begin{aligned}b_n + \log 2 &= 2^{n-1} \log(2\alpha - 1) \\ \Leftrightarrow b_n &= 2^{n-1} \log(2\alpha - 1) - \log 2\end{aligned}$$

となる。

(答) $b_n = 2^{n-1} \log(2\alpha - 1) - \log 2$

(4)

$\frac{1}{2} < \alpha < 1$ より、 $0 < 2\alpha - 1 < 1$ であるから

$$\log(2\alpha - 1) < 0$$

となる。したがって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 2^{n-1} \log(2\alpha - 1) - \log 2 \right\} = -\infty$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}b_n &= \log \left(a_n - \frac{1}{2} \right) \\ \Leftrightarrow a_n &= e^{b_n} + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

であるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{b_n} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

となる。

(答) $\frac{1}{2}$

第4問

(1)

2回投げた後に原点にない確率 p を考える。2回投げた後に $(1, 0)$ にあるのは1回目に x 軸方向に $+1$ 移動した後、2回目でその場でとどまる場合または1回目にその場でとどまり、2回目で x 軸方向に $+1$ 移動する場合である。よって、この確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

となる。2回投げた後に $(1, 1)$ にあるのは1回目に x 軸方向に $+1$ 移動した後、2回目で y 軸方向に $+1$ 移動する場合または、1回目で y 軸方向に $+1$ 移動した後、2回目で x 軸方向に $+1$ 移動する場合である。よって、この確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

となる。2回投げた後に $(2, 0)$ にあるのは1回目と2回目の両方で x 軸方向に $+1$ 移動する場合であるから、この確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$$

となる。以上から、対称性を利用して

$$\begin{aligned} p &= 4 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} \right) \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。したがって、2回投げた後に $(0, 0)$ にある確率は

$$1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

となる。

(答) $\frac{1}{3}$

(2)

2回投げた後に $(1, 0)$ にあり、3回目で原点に戻るためには3回目で3または6の目が出ればよいことから、この確率は

$$\frac{1}{12} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{36}$$

となる。2回投げた後に $(1, 1)$ にあり、3回目で原点に戻るためには3回目で6の目が出ればよいことから、この確率は

$$\frac{1}{18} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{108}$$

となる。2回投げた後に $(2, 0)$ にあり、3回目で原点に戻るためには3回目で6の目が出ればよいことから、この確率は

$$\frac{1}{36} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

となる。2回投げた後に $(0, 0)$ にあり、3回目で原点に戻るためには3回目で5または6の目が出ればよいことから、この確率は

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{9}$$

となる。したがって、対称性から、3回目投げた後に原点にある確率は

$$\left(\frac{1}{36} + \frac{1}{108} + \frac{1}{216} \right) \times 4 + \frac{1}{9} = \frac{5}{18}$$

となる。

(答) $\frac{5}{18}$

(3)

以下、1回目に出た目が a 、2回目に出た目が b 、3回目に出た目が c であるとき (a, b, c) と表す。

[1] 3回目に座標 $(1, 0)$ にあるとき

このときの場合の数は点Pの動き方で分けて考えると

$(5, 5, 1), (5, 6, 1), (6, 5, 1), (6, 6, 1)$
 $(5, 1, 5), (6, 1, 5)$
 $(1, 5, 5)$
 $(1, 1, 3)$
 $(1, 3, 1), (1, 6, 1)$
 $(3, 1, 1), (3, 6, 1)$
 $(2, 4, 1), (2, 6, 1)$
 $(2, 1, 4)$
 $(1, 2, 4)$
 $(4, 2, 1), (4, 6, 1)$
 $(4, 1, 2)$
 $(1, 4, 2)$

の20通りである。したがって、3回目に座標 $(1, 0)$ にある確率は $\frac{20}{6^3}$ である。このとき、4

回目に原点に戻るのは、4回目に3または6の目が出る場合である。よって、この確率は

$$\frac{20}{6^3} \times \frac{2}{6} = \frac{40}{6^4}$$

である。

[2] 3回目に座標 $(1, 1)$ にあるとき

このときの場合の数は

$(5, 1, 2), (6, 1, 2)$
 $(1, 5, 2)$
 $(1, 2, 5)$
 $(5, 2, 1), (6, 2, 1)$
 $(2, 5, 1)$
 $(2, 1, 5)$

の8通りである。したがって、3回目に座標 $(1, 1)$ にある確率は $\frac{8}{6^3}$ である。このとき、4回

目に原点に戻るのは、4回目に6の目が出る場合であるから、この確率は

$$\frac{8}{6^3} \times \frac{1}{6} = \frac{8}{6^4}$$

である。

[3] 3回目に座標 $(2, 0)$ にあるとき

このときの場合の数は

$(5, 1, 1), (6, 1, 1)$
 $(1, 5, 1)$
 $(1, 1, 5)$

の4通りである。したがって、3回目に座標 $(2, 0)$ にある確率は $\frac{4}{6^3}$ である。このとき、4

回目に原点に戻るのは、4回目に6の目が出る場合であるから、この確率は

$$\frac{4}{6^3} \times \frac{1}{6} = \frac{4}{6^4}$$

である。

[4] 3回目に座標 $(2, 1)$ にあるとき

このときの場合の数は

$(2, 1, 1)$
 $(1, 2, 1)$
 $(1, 1, 2)$

の3通りである。したがって、3回目に座標 $(2, 1)$ にある確率は $\frac{3}{6^3}$ である。このとき、4回

目に原点に戻るのは、4回目に6の目が出る場合であるから、この確率は

$$\frac{3}{6^3} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{6^4}$$

である。

[5] 3回目に座標 $(1, 2)$ にあるとき

対称性より、[4]と同様であるから、4回目に原点に戻る確率は $\frac{3}{6^4}$ である。

[6] 3回目に座標 $(3, 0)$ にあるとき

このときの場合の数は

$(1, 1, 1)$

の1通りである。したがって、3回目に座標 $(3, 0)$ にある確率は $\frac{1}{6^3}$ である。このとき、4回

目に原点に戻るのは、4回目に6の目が出る場合であるから、この確率は

$$\frac{1}{6^3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6^4}$$

である。

[7] 3回目に原点にあるとき

(2)より、この確率は $\frac{5}{18}$ である。このとき、4回目に原点に戻るのは、4回目に5または6

の目が出る場合であるから、この確率は

$$\frac{5}{18} \times \frac{2}{6} = \frac{120}{6^4}$$

である。

以上[1]~[7]より、4回投げた後に原点にある確率は、対称性を利用して

$$\left(\frac{40}{6^4} + \frac{8}{6^4} + \frac{4}{6^4} + \frac{3}{6^4} + \frac{3}{6^4} + \frac{1}{6^4} \right) \times 4 + \frac{120}{6^4} = \frac{89}{324}$$

となる。

(答) $\frac{89}{324}$