

第1問

(1)

$S_1 = a_1$ であるから、 $n=1$ とすると

$$\begin{aligned} S_1 &= 1+3+2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

となるから、 $a_1 = 6$ である。 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + 3n + 2 - \{(n-1)^2 + 3(n-1) + 2\} \\ &= 2n + 2 \end{aligned}$$

となる。したがって数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\begin{cases} n=1 \text{ のとき, } a_n = 6 \\ n \geq 2 \text{ のとき, } a_n = 2n + 2 \end{cases}$$

となる。

$$\begin{aligned} (\text{答}) \quad & n=1 \text{ のとき, } a_n = 6 \\ & n \geq 2 \text{ のとき, } a_n = 2n + 2 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} S_n &= n^2 + 3n + 2 \\ &= (n+1)(n+2) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{S_n S_{n+2}}{S_{n+1}} &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{(n+2)(n+3)} \\ &= (n+1)(n+4) \\ &= n^2 + 5n + 4 \end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} \frac{S_1 S_3}{S_2} + \frac{S_2 S_4}{S_3} + \frac{S_3 S_5}{S_4} + \cdots + \frac{S_n S_{n+2}}{S_{n+1}} &= \sum_{k=1}^n \frac{S_k S_{k+2}}{S_{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^n (k^2 + 5k + 4) \\ &= \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) + \frac{5}{2}n(n+1) + 4n \\ &= \frac{n}{3}(n+4)(n+5) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{n}{3}(n+4)(n+5)$$

(3)

$S_n = (n+1)(n+2)$ より

$$\begin{aligned} \frac{S_4}{S_3 S_5} + \frac{S_7}{S_6 S_8} + \frac{S_{10}}{S_9 S_{11}} + \cdots + \frac{S_{3n+1}}{S_{3n} S_{3n+2}} &= \sum_{k=1}^n \frac{S_{3k+1}}{S_{3k} S_{3k+2}} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(3k+2)(3k+3)}{(3k+1)(3k+2)(3k+3)(3k+4)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3k+1} - \frac{1}{3k+4} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3n+4} \right) \\ &= \frac{n}{4(3n+4)} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{n}{4(3n+4)}$$

第 2 問

(1)

与式から

$$\begin{aligned} f(4) &= 4^2(4^2+8) \\ &= 384 \\ &= 2^7 \cdot 3 \end{aligned}$$

である。したがって $f(4)$ の正の約数の個数は

$$(7+1)(1+1)=16$$

より 16 個である。

(答) 16 個

(2)

$$\begin{aligned} f(n) &= n^2(n^2+8) \\ &= n^2(n^2-1+9) \\ &= (n-1)n^2(n+1)+9n^2 \end{aligned}$$

となる。ここで $n-1, n, n+1$ は連続する 3 整数であり、いずれか 1 つは 3 の倍数であるから $(n-1)n^2(n+1)$ は 3 の倍数となる。また、 $9n^2$ も 3 の倍数であるから $f(n)$ は 3 の倍数である。

(証明終)

(3)

10 を素因数分解すると

$$10 = 2 \cdot 5 \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}$$

であり、 $f(n)$ の異なる素因数の個数は 2 つであることから、 p, q を異なる素数として

$$f(n) = p^4 \cdot q$$

となる。(2) より、 $f(n)$ が 3 の倍数であるから p, q のうち 1 つは 3 である。

[1] $p = 3$ のとき

$$n^2(n^2+8) = 3^4 \cdot q$$

となる。ここで、 n^2, n^2+8 について、差が 8 であるから、ともに 3 の倍数であることはない。よって、 n^2 が平方数であること、 $n^2 < n^2+8$ であることを考えると、

$$(n^2, n^2+8) = (1, 3^4 q), (3^4, q)$$

に限られる。

[i] $(n^2, n^2+8) = (1, 3^4 q)$ のとき

$$n^2 = 1$$

となるが、このとき

$$n^2+8 = 3^4 q$$

$$\therefore 1 = 3^2 q$$

となり、これは不適である。

[ii] $(n^2, n^2+8) = (3^4, q)$ のとき

$$n^2 = 81$$

$$\therefore n = 9 \ (\because n > 0)$$

となる。このとき、

$$n^2+8 = q$$

$$\therefore q = 89$$

となり、 q が素数であることを満たす。

[2] $q = 3$ のとき

$$n^2(n^2+8) = p^4 \cdot 3$$

となる。 n^2 が平方数であること、 $n^2 < n^2+8$ であることより、

$$(n^2, n^2+8) = (1, 3p^4), (p^2, 3p^2)$$

に限られる。

[i] $(n^2, n^2+8) = (1, 3p^4)$ のとき

$$n^2 = 1$$

となるが、このとき

$$n^2+8 = 3p^4$$

$$\Leftrightarrow p^4 = 3$$

となるが、これを満たす素数 p は存在せず不適である。

[ii] $(n^2, n^2+8) = (p^2, 3p^2)$ のとき

$$n^2 = p^2$$

$$\therefore n = p \ (\because n, p > 0)$$

となる。このとき

$$p^2(p^2+8) = 3p^4$$

$$\Leftrightarrow p^2+8 = 3p^2$$

$$\therefore p = 2 \ (\because p > 0)$$

となり、 p が素数であることを満たす。よって、

$$n = 2$$

となる。

以上[1][2]より、 $n = 2, 9$ である。

(答) $n = 2, 9$

第3問

(1)

$$|\overrightarrow{OA}|=6, |\overrightarrow{OB}|=4, |\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|=2\sqrt{11} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|^2 &= (2\sqrt{11})^2 \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{OA}|^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OB}|^2 &= 44 \\ \Leftrightarrow 6^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 4^2 &= 44 \\ \therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= 4 \end{aligned}$$

となる。また,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|^2 &= |\overrightarrow{OA}|^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OB}|^2 \\ &= 6^2 + 2 \cdot 4 + 4^2 \\ &= 60 \end{aligned}$$

となる。よって, $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}| \geq 0$ であるから, $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=2\sqrt{15}$ となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 4, |\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}| = 2\sqrt{15}$$

(2)

$|\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}| \geq 0$ であるから, $|\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}|^2$ が最小値をとるとき $|\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}|$ も最小値をとる。ここで,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}|^2 &= |\overrightarrow{OA}|^2 + 2t\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + t^2 |\overrightarrow{OB}|^2 \\ &= 16t^2 + 8t + 36 \\ &= 16\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 + 35 \end{aligned}$$

となるから, $|\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}|^2$ は $t = -\frac{1}{4}$ で最小値 35 をとる。したがって, $|\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}|$ は $t_1 = -\frac{1}{4}$ のとき最小値 $\sqrt{35}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad t_1 = -\frac{1}{4}, \text{ 最小値 } \sqrt{35}$$

(3)

条件より $|\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|$ となるから, (1)より, $|\overrightarrow{OC}| = 2\sqrt{15}$ である。また, (2)より,

$$|\overrightarrow{OD}| = \left|\overrightarrow{OA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{OB}\right| \text{ となり, } |\overrightarrow{OD}| = \sqrt{35} \text{ である。ここで}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} &= (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \left(\overrightarrow{OA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{OB}\right) \\ &= |\overrightarrow{OA}|^2 + \frac{3}{4}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - \frac{1}{4}|\overrightarrow{OB}|^2 \\ &= 35 \end{aligned}$$

となる。したがって, $\triangle OCD$ の面積は

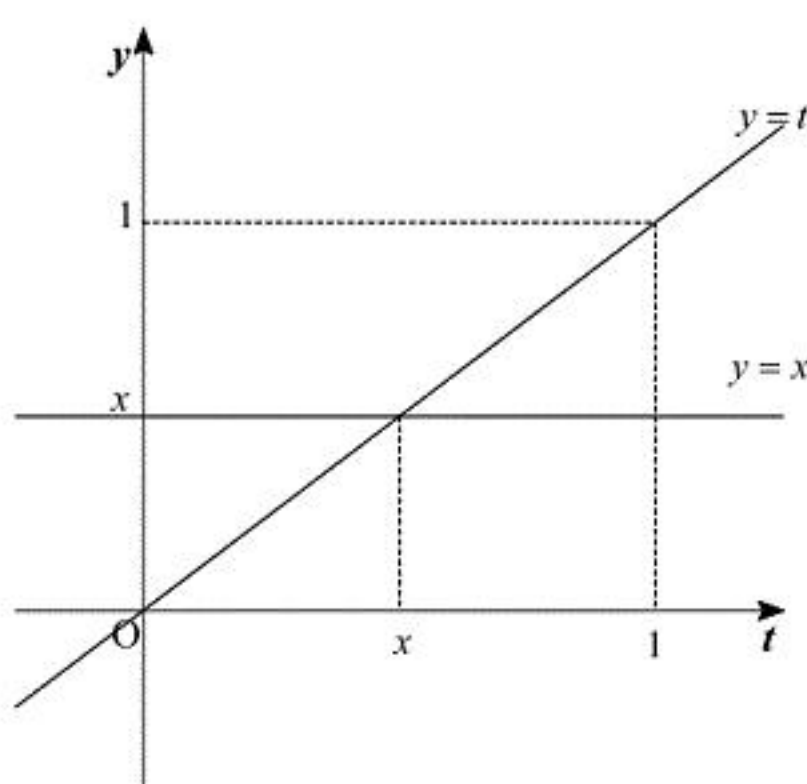
$$\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OC}|^2 |\overrightarrow{OD}|^2 - (\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{60 \cdot 35 - 35^2} = \frac{5}{2}\sqrt{35}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{5}{2}\sqrt{35}$$

第4問

(1)



グラフより $0 < x < 1$ のとき

$$\begin{aligned} \int_0^1 |t-x| dt &= \int_0^x (-t+x) dt + \int_x^1 (t-x) dt \\ &= \left[-\frac{t^2}{2} + xt \right]_0^x + \left[\frac{t^2}{2} - xt \right]_x^1 \\ &= x^2 - x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $x^2 - x + \frac{1}{2}$

(2)

$\frac{1}{2} < a_n < 1$ が成立することを数学的帰納法で証明する。

[1] $n=1$ のとき

$a_1 = \alpha$ で、 $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ であるから、 $\frac{1}{2} < a_n < 1$ は $n=1$ のとき成り立つ。

[2] $n=k$ のとき

このとき、 $\frac{1}{2} < a_n < 1$ が成立することを仮定する。つまり、 $\frac{1}{2} < a_k < 1$ が成り立つ。(1)の結果から

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2 \int_0^1 |t - a_k| dt \\ &= 2 \left(a_k^2 - a_k + \frac{1}{2} \right) \\ &= 2a_k^2 - 2a_k + 1 \\ &= 2 \left(a_k - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。 $\frac{1}{2} < a_k < 1$ のとき、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &< 2 \left(a_k - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} < 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &< a_{k+1} < 1 \end{aligned}$$

となるから、 $\frac{1}{2} < a_n < 1$ は $n=k+1$ のときも成り立つ。

以上[1][2]より、 $\frac{1}{2} < a_n < 1$ はすべての自然数 n に対して成り立つ。

(証明終)

(3)

(2)より、 $a_{n+1} = 2a_n^2 - 2a_n + 1$ となるから

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n^2 - 2a_n + 1 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - \frac{1}{2} &= 2 \left(a_n - \frac{1}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

となる。 $\frac{1}{2} < a_n < 1$ より、 $a_n - \frac{1}{2} > 0$ であるから、両辺の自然対数をとると

$$\begin{aligned} \log \left(a_{n+1} - \frac{1}{2} \right) &= \log \left\{ 2 \left(a_n - \frac{1}{2} \right)^2 \right\} \\ \Leftrightarrow \log \left(a_{n+1} - \frac{1}{2} \right) &= \log 2 + 2 \log \left(a_n - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

となる。 $b_n = \log \left(a_n - \frac{1}{2} \right)$ より、

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 2b_n + \log 2 \\ \Leftrightarrow b_{n+1} + \log 2 &= 2(b_n + \log 2) \end{aligned}$$

となる。よって、数列 $\{b_n + \log 2\}$ は、初項 $b_1 + \log 2 = \log \left(a_1 - \frac{1}{2} \right) + \log 2 = \log(2\alpha - 1)$ 、公比2の

等比数列であるから、

$$\begin{aligned} b_n + \log 2 &= 2^{n-1} \log(2\alpha - 1) \\ \Leftrightarrow b_n &= 2^{n-1} \log(2\alpha - 1) - \log 2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $b_n = 2^{n-1} \log(2\alpha - 1) - \log 2$

(4)

$\frac{1}{2} < \alpha < 1$ より、 $0 < 2\alpha - 1 < 1$ であるから

$$\log(2\alpha - 1) < 0$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ 2^{n-1} \log(2\alpha - 1) - \log 2 \} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} b_n &= \log \left(a_n - \frac{1}{2} \right) \\ \Leftrightarrow a_n &= e^{b_n} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

であるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{b_n} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

となる。

(答) $\frac{1}{2}$