

I 座標平面上で2点 $A(a, 0)$, $B(0, b)$ を通る直線を ℓ とする。ただし, $a > 0$, $b > 0$ である。直線 ℓ と x 軸および y 軸に接し, 中心が第1象限にある2つの異なる円を C_1 , C_2 とする。円 C_1 , C_2 の中心の x 座標をそれぞれ x_1 , x_2 とするとき, $|x_1 - x_2|$ を a と b で表せ。

II 空間内に3つのベクトル $\vec{a} = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$, $\vec{b} = (\sin \alpha, -\cos \alpha, t)$, $\vec{c} = (\sin \alpha, \cos \alpha, 0)$ がある。ただし, α, t は実数である。ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に垂直であり $\vec{0}$ ではないベクトルを $\vec{v}$ とする。ベクトル $\vec{v}$ と $\vec{c}$ のなす角を θ として $\cos \theta$ を求めよ。

Ⅲ 数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = 3$, $a_n < a_{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$) を満たしている。各 n に対して、直線 $y = a_{n+1}x + 1$ と放物線 $y = x^2 + a_nx + 1$ で囲まれた図形の面積が $\frac{1}{6}(2n+3)^3$ となるときの、下の問いに答えよ。

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) すべての n に対して、 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < \frac{3}{4}$ が成り立つことを示せ。

IV $x > 0$ のとき, 関数 $f(x) = \int_0^1 \left| \log \frac{t+1}{x} \right| dt$ の最小値を求めよ。ただし, 対数は自然対数とする。