

C_2 上の点 $(t, t^2 + 5)$ (t は実数) における C_2 の接線を l とし、その方程式を求めると、 $(t^2)' = 2t$

であることから、

$$\begin{aligned} y &= 2t(x - t) + (t^2 + 5) \\ \Leftrightarrow 2tx - y - t^2 + 5 &= 0 \end{aligned}$$

となる。 C_1 は原点を中心とする半径 1 の円であるから、直線 l が C_1 と接するためには、 C_1 の中心である原点 O と直線 l の距離が 1 であればよい。原点 O と直線 l の距離は

$$\frac{|2t \cdot 0 - 1 \cdot 0 - t^2 + 5|}{\sqrt{(2t)^2 + (-1)^2}} = \frac{|t^2 - 5|}{\sqrt{4t^2 + 1}}$$

で求められる。よって、考えられる t の値は

$$\begin{aligned} \frac{|t^2 - 5|}{\sqrt{4t^2 + 1}} &= 1 \\ \Leftrightarrow |t^2 - 5| &= \sqrt{4t^2 + 1} \\ \Leftrightarrow (t^2 - 5)^2 &= 4t^2 + 1 \\ \Leftrightarrow t^4 - 14t^2 + 24 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t^2 - 2)(t^2 - 12) \\ \Leftrightarrow t &= \pm\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

である。したがって、求める接線の方程式は

$$\begin{aligned} \pm 2\sqrt{2}x - y + 3 &= 0 \\ \pm 4\sqrt{3}x - y - 7 &= 0 \end{aligned}$$

となる。このうち、傾きが最小となるのは $t = -2\sqrt{3}$ の場合であり、このときの接線の方程式は $-4\sqrt{3}x - y - 7 = 0$

である。 $t = -2\sqrt{3}$ から、 C_2 との接点は $(-2\sqrt{3}, 17)$ である。直線 $-4\sqrt{3}x - y - 7 = 0$ と C_1 の接点

の座標を (x_0, y_0) とすると、直線 $-4\sqrt{3}x - y - 7 = 0$ の傾き $-4\sqrt{3}$ は $-\frac{x_0}{y_0}$ と表すことができ、接

点が直線 $-4\sqrt{3}x - y - 7 = 0$ 上にいることから $-4\sqrt{3}x_0 - y_0 - 7 = 0$ を満たす。したがって、

$$\begin{aligned} -\frac{x_0}{y_0} &= -4\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \frac{x_0}{4\sqrt{3}x_0 + 7} &= -4\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow x_0 &= -4\sqrt{3}(4\sqrt{3}x_0 + 7) \\ \Leftrightarrow 49x_0 &= -7 \cdot 4\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow x_0 &= -\frac{4\sqrt{3}}{7} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} y_0 &= -4\sqrt{3}\left(-\frac{4\sqrt{3}}{7}\right) - 7 \\ &= \frac{48}{7} - 7 \\ &= -\frac{1}{7} \end{aligned}$$

である。

(答) 直線の方程式 $\pm 2\sqrt{2}x - y + 3 = 0$

$\pm 4\sqrt{3}x - y - 7 = 0$

C_1 との接点 $\left(-\frac{4\sqrt{3}}{7}, -\frac{1}{7}\right)$

C_2 との接点 $(-2\sqrt{3}, 17)$

II

(1)

$$(A - \alpha E)^2 = A^2 - 2\alpha A + \alpha^2 E$$

であるから,

$$(A - \alpha E)^2 = O$$

ならば,

$$A^2 = 2\alpha A - \alpha^2 E \quad \dots \textcircled{1}$$

である。ここで、数学的帰納法を利用して、

$$P(n): A^{n+1} = (n+1)\alpha^n A - n\alpha^{n+1} E$$

とおいたとき、すべての自然数 n に対して $P(n)$ が成り立つことを示す。

[1] $n=1$ のとき

$$P(1): A^2 = 2\alpha A - \alpha^2 E$$

である。これは、 $\textcircled{1}$ より成立する。

[2] $n=k$ での成立を仮定する。

すなわち、 $P(k): A^{k+1} = (k+1)\alpha^k A - k\alpha^{k+1} E$ が成立すると仮定する。このとき、

$$\begin{aligned} A^{k+2} &= A \cdot A^{k+1} \\ &= (k+1)\alpha^k A^2 - k\alpha^{k+1} A \\ &= (k+1)\alpha^k (2\alpha A - \alpha^2 E) - k\alpha^{k+1} A \\ &= \{2(k+1)\alpha^{k+1} - k\alpha^{k+1}\} A - (k+1)\alpha^{k+2} E \\ &= (k+2)\alpha^{k+1} A - (k+1)\alpha^{k+2} E \end{aligned}$$

である。よって、 $P(k+1)$ も成立する。

以上[1], [2]より、すべての自然数に対して $P(n)$ が成立する。

(証明終)

(2)

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ のとき、ハミルトン・ケーリーの定理より

$$A^2 - 2A + E = O$$

$$\Leftrightarrow (A - E)^2 = O$$

が成立する。したがって、 $\alpha=1$ として(1)の結果を利用すると、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} A^n &= n\alpha^{n-1} A - (n-1)\alpha^n E \\ &= nA - (n-1)E \\ &= n \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} - (n-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2n+1 & 2n \\ -2n & -2n+1 \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $n=1$ のときも

$$A = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 & 2 \cdot 1 \\ -2 \cdot 1 & -2 \cdot 1 + 1 \end{pmatrix}$$

となるから、 $\textcircled{2}$ はすべての自然数に対して成り立つ。

$$(\text{答}) \begin{pmatrix} 2n+1 & 2n \\ -2n & -2n+1 \end{pmatrix}$$

Ⅲ

(1)

$f(x)$ は微分可能で、 $f'(0)=k$ であるから、 $\lim_{y \rightarrow \pm 0} \frac{f(y)-f(0)}{y} = k$ である。

[1] $a \neq 0$ のとき

$\frac{a}{x} = y$ とおくと、 $x \rightarrow \infty$ に対し、 $a > 0$ ならば $y \rightarrow +0$ 、 $a < 0$ ならば $y \rightarrow -0$ となり

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(f\left(\frac{a}{x}\right) - f(0) \right) &= \lim_{y \rightarrow \pm 0} \frac{a}{y} (f(y) - f(0)) \\ &= \lim_{y \rightarrow \pm 0} a \cdot \frac{f(y) - f(0)}{y} \\ &= ak \end{aligned}$$

である。

[2] $a = 0$ のとき

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a}{x}\right) - f(0) &= f(0) - f(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(f\left(\frac{a}{x}\right) - f(0) \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} 0 \\ &= 0 \\ &= ak \end{aligned}$$

が成立する。

以上より、 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(f\left(\frac{a}{x}\right) - f(0) \right) = ak$ である。

(答) ak

(2)

(1)の結果より、

$$a_n = k^2 a_{n-1}^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。

[1] $k = 0$ のとき

①式より、 $a_n = 0$ である。

[2] $k \neq 0$ のとき

$a_1 = 1 > 0$ より、帰納的に $a_n > 0 (n=1, 2, 3)$ であることがわかる。よって、漸化式①の両辺の対数をとると

$$\log a_n = 2 \log a_{n-1} + \log k^2$$

である。 $\log a_n = b_n$ 、 $\log k^2 = \alpha$ とおくと、 $a_1 = 1$ より $b_1 = 0$ であるから、

$$\begin{aligned} b_n &= 2b_{n-1} + \alpha \\ \Leftrightarrow b_n + \alpha &= 2(b_{n-1} + \alpha) \\ \Leftrightarrow b_n + \alpha &= 2^{n-1} \alpha \\ \Leftrightarrow b_n &= (2^{n-1} - 1) \alpha \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} \log a_n &= (2^{n-1} - 1) \log k^2 \\ &= \log k^{2(2^{n-1} - 1)} \\ &= \log k^{2^n - 2} \end{aligned}$$

であるから、

$$a_n = k^{2^n - 2} \quad (k \neq 0, n=1, 2, 3, \dots)$$

となる。

以上[1], [2]より、

$$a_n = k^{2^n - 2} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

である。また、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} k^{2^n - 2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} k^{2(2^{n-1} - 1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (k^2)^{2^{n-1} - 1} \end{aligned}$$

より、 $\{a_n\}$ が収束するための k の値の範囲は

$$-1 \leq k \leq 1$$

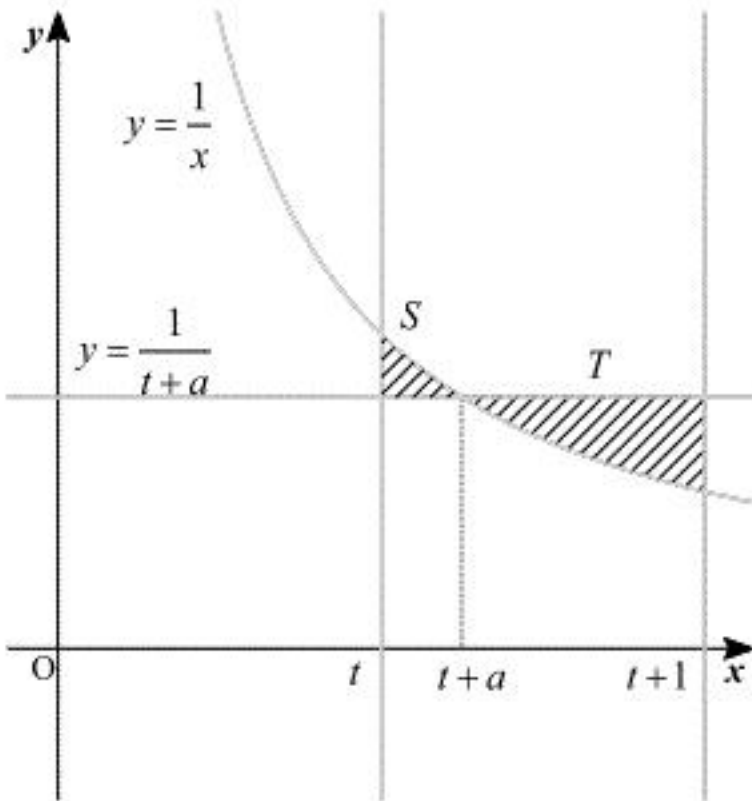
である。

(答) $a_n = k^{2^n - 2} (n=1, 2, 3, \dots)$

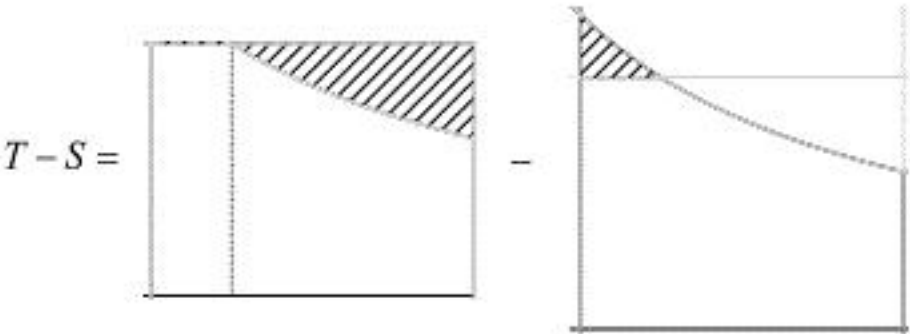
収束するような k の範囲 $-1 \leq k \leq 1$

IV

考える図の概形は下のようになる



T と S の差は、共通部分を考えて、



とすれば、

$$T-S=\frac{1}{t+a}-\int_t^{t+1}\frac{1}{x}dx$$

であることがわかる。これを $f(t)$ とおく。このとき

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\frac{1}{(t+a)^2} - \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t} \right) \\ &= -\frac{1}{(t+a)^2} + \frac{1}{t(t+1)} \\ &= \frac{a^2 - (1-2a)t}{t(t+1)(t+a)^2} \end{aligned}$$

であり、 $0 < a < \frac{1}{2}$ であるから、 $f(t)$ の増減表は下のようになる。

t	0		$\frac{a^2}{1-2a}$		$\frac{1}{2}$
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		↗	極大	↘	

増減表より、 $f(t)$ は $t = \frac{a^2}{1-2a}$ のときに最大値をとることがわかる。これを代入すると、

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a^2}{1-2a}\right) &= \frac{1-2a}{a(1-a)} - \log \frac{(1-a)^2}{1-2a} + \log \frac{a^2}{1-2a} \\ &= \frac{1}{a} - \frac{1}{1-a} + 2\log a - 2\log(1-a) \end{aligned}$$

であるから、これを $g(a)$ とおく。このとき、

$$\begin{aligned} g'(a) &= -\frac{1}{a^2} - \frac{1}{(1-a)^2} + \frac{2}{a} + \frac{2}{1-a} \\ &= -\frac{1-2a}{a^2} + \frac{1-2a}{(1-a)^2} \\ &= -(1-2a) \left\{ \frac{1}{a^2} - \frac{1}{(1-a)^2} \right\} \end{aligned}$$

である。ここで、 $0 < a < \frac{1}{2}$ より $1-2a > 0$ であり、さらに

$$\begin{aligned} a &< 1-a \\ \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} - \frac{1}{(1-a)^2} &> 0 \end{aligned}$$

であるので、 $0 < a < \frac{1}{2}$ の範囲において $g'(a) < 0$ である。よって、 $g(a)$ は $0 < a < \frac{1}{2}$ において減少関数であり、

$$\lim_{a \rightarrow \frac{1}{2}-0} g(a) = 0$$

であるから、 $g(a) > 0 \left(0 < a < \frac{1}{2} \right)$ である。

(証明終)