

題意より、 $P(x)$ はある整式 $Q(x), R(x)$ を用いて

$$\begin{aligned} P(x) &= Q(x)(x^3-1)+ax^2-bx+1 \\ &= Q(x)(x-1)(x^2+x+1)+ax^2-bx+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x)(x^3+2x^2+2x+1)-3ax^2+bx+9 \\ &= R(x)(x+1)(x^2+x+1)-3ax^2+bx+9 \end{aligned}$$

と表すことができる。ここで $\alpha^2+\alpha+1=0$ なる α を考えると

$$\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

であり

$$\begin{cases} P(\alpha) = a\alpha^2 - b\alpha + 1 \\ P(\alpha) = -3a\alpha^2 + b\alpha + 9 \end{cases}$$

を満たす。よって

$$\begin{aligned} a\alpha^2 - b\alpha + 1 &= -3a\alpha^2 + b\alpha + 9 \\ \Leftrightarrow 4a\alpha^2 - 2b\alpha - 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2a(-\alpha-1) - b\alpha - 4 &= 0 \quad (\because \alpha^2 = -\alpha-1) \\ \Leftrightarrow (2a+b)\alpha + 2a + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2a-b+8 \pm \sqrt{3}i(2a+b) &= 0 \end{aligned}$$

であるから、実数 a, b がこの等式を満たすとき、複素数の相等条件から

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2a-b+8=0 \\ 2a+b=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=4 \end{cases} \end{aligned}$$

である。

(答) $\begin{cases} a=-2 \\ b=4 \end{cases}$

II

(1)

点 M は線分 BC の中点だから

$$BM = CM$$

であり、点 P, R は点 M に関して対称だから

$$PM = RM$$

$$\angle BMP = \angle CMR \text{ (対称角)}$$

である。従って

$$\triangle BPM \equiv \triangle CRM$$

であるから

$$\angle PBM = \angle RCM$$

である。これより

$$\begin{aligned}\angle ACR &= \angle ACB + \angle RCM \\ &= \angle ACB + \angle PBM \\ &= \pi - \theta\end{aligned}$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad \angle ACR = \pi - \theta$$

(2)

$\triangle PMQ$ と $\triangle RMQ$ において

QM 共通

$$PM = RM$$

$$\angle PMQ = \angle RMQ = 90^\circ$$

より

$$\triangle PMQ \equiv \triangle RMQ$$

であるから

$$PQ = RQ$$

である。また、(1)より

$$CR = BP$$

$$\angle QCR = \pi - \theta$$

である。従って、 $\triangle QRC$ において余弦定理より

$$QR^2 = CQ^2 + CR^2 - 2CQ \cdot CR \cos(\pi - \theta)$$

であり、 $PQ = RQ > 0$ と $CR = BP$ より

$$PQ = \sqrt{BP^2 + CQ^2 + 2BP \cdot CQ \cos \theta}$$

である。

$$\text{(答)} \quad PQ = \sqrt{BP^2 + CQ^2 + 2BP \cdot CQ \cos \theta}$$

[1] $k > 0$ のとき

$y = kx$ と $y = xe^{-x}$ の交点の x 座標は

$$kx = xe^{-x}$$

を解いて

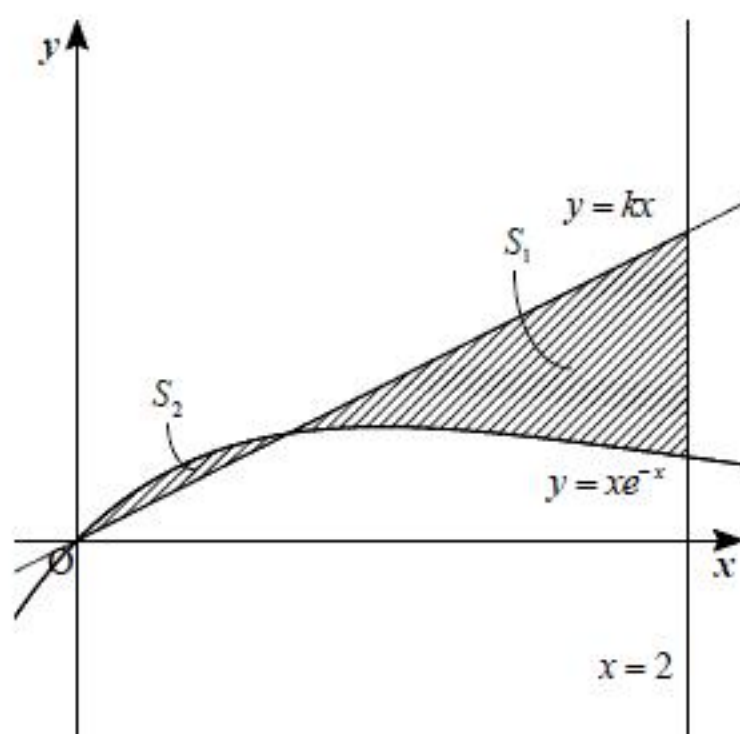
$$x = 0, -\log k$$

と求まる。交点の x 座標は $0 \leq x \leq 2$ を満たすから

$$0 \leq -\log k \leq 2$$

$$\Leftrightarrow e^{-2} \leq k \leq 1$$

である。下図のように S_1 , S_2 を定める。



[ア] $S = S_1 + S_2$ と定義するとき

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{-\log k} (xe^{-x} - kx) dx + \int_{-\log k}^2 (kx - xe^{-x}) dx \\ &= \left[-xe^{-x} - e^{-x} - \frac{1}{2}kx^2 \right]_0^{-\log k} + \left[xe^{-x} + e^{-x} + \frac{1}{2}kx^2 \right]_{-\log k}^2 \\ &= 2k \log k - k(\log k)^2 + 1 + 3e^{-2} \end{aligned}$$

であり

$$\frac{dS}{dk} = 2 - (\log k)^2$$

であるから, $\frac{dS}{dk} = 0$ とすると

$$(\log k)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow k = e^{-\sqrt{2}}$$

である。よって S の増減表は以下のようになる。

k	e^{-2}	$\cdots$	$e^{-\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$\frac{dS}{dk}$		-		+	
S	$1 - 5e^{-2}$	$\searrow$	$1 + 3e^{-2} - (2\sqrt{2} + 2)e^{-\sqrt{2}}$	$\nearrow$	$1 + 3e^{-2}$

増減表より求める k は

$$k = e^{-\sqrt{2}}$$

である。

[イ] $S = S_1$ と定義するとき

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\log k}^2 (kx - xe^{-x}) dx \\ &= \left[xe^{-x} + e^{-x} + \frac{1}{2}kx^2 \right]_{-\log k}^2 \\ &= k + k \log k - \frac{1}{2}k(\log k)^2 + 3e^{-2} \end{aligned}$$

であり

$$\frac{dS}{dk} = 2 - \frac{1}{2}(\log k)^2 \geq 0$$

だから, S は $e^{-2} \leq k \leq 1$ で単調増加するので, 求める k は

$$k = e^{-2}$$

である。

[2] $k \leq 0$ のとき

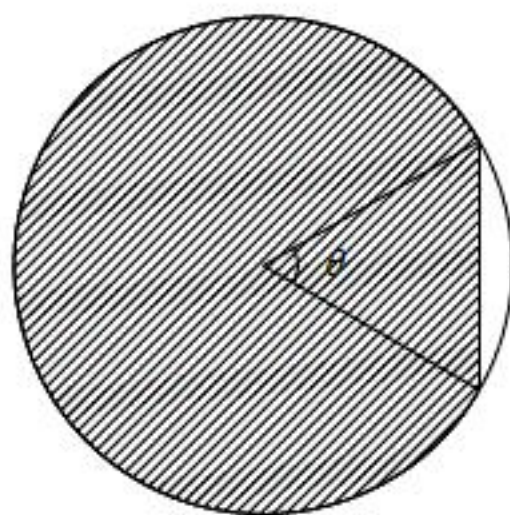
このとき $y = kx$ と $y = xe^{-x}$ は $0 \leq x \leq 2$ において交点を持たないので不適。

[1], [2]より, 求める k は

$$\begin{cases} \text{[ア]のとき } k = e^{-\sqrt{2}} \\ \text{[イ]のとき } k = e^{-2} \end{cases}$$

である。

(答) [ア]のとき $k = e^{-\sqrt{2}}$, [イ]のとき $k = e^{-2}$



上図のように半分のみ考えれば

$$\frac{L}{2} = 2\pi - \theta$$

$$\frac{S}{2} = \pi - \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\sin\theta$$

であるから

$$\begin{aligned}\frac{S}{L} &= \frac{\pi - \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\sin\theta}{2\pi - \theta} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin\theta}{2\pi - \theta}\end{aligned}$$

である。従って、 $f(\theta) = \frac{\sin\theta}{2\pi - \theta}$ が $0 < \theta < \pi$ で最大値をとる θ が唯一なことを示せば良い。

$$f'(\theta) = \frac{(2\pi - \theta)\cos\theta + \sin\theta}{(2\pi - \theta)^2}$$

であるから、 $f'(\theta) = 0$ とすると

$$(2\pi - \theta)\cos\theta + \sin\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan\theta = \theta - 2\pi \left(\because f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0 \right)$$

となる。ここで、 $\tan\theta \left(\theta \neq \frac{\pi}{2} \right)$, $\theta - 2\pi$ は単調増加関数であること、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ で

$$\tan\theta > \theta - 2\pi$$

であること、および

$$\tan\frac{3}{4}\pi = -1 > -\frac{5}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi - 2\pi$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} (\tan\theta - (\theta - 2\pi)) = -\infty$$

であることを考えれば、 $f'(\theta) = 0$ は $0 < \theta < \pi$ で唯一の解を持つ。従って、 $f'(\alpha) = 0$ なる α ($0 < \alpha < \pi$) を用いて、増減表は以下ようになる。

θ	0	...	α	...	π
$f'(\theta)$		+	0	-	
$f(\theta)$		$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	

増減表より、 $f(\theta) = \frac{\sin\theta}{2\pi - \theta}$ を最大にする θ はただ1つ存在するので、題意は示された。