

ハミルトンケーリーの定理より,

$$\begin{aligned} A^2 &= (3a-2)A - \{(a-1)(2a-1) - 2a\}E \\ &= (3a-2)A - (2a^2 - 5a + 1)E \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} (A - bE)^2 &= O \\ \Leftrightarrow A^2 - 2bA + b^2E &= O \\ \Leftrightarrow (3a-2b-2)A + (-2a^2 + 5a + b^2 - 1)E &= O \end{aligned}$$

となる。ここで、 $A = \begin{pmatrix} a-1 & 2a \\ 1 & 2a-1 \end{pmatrix}$ であるから、 A が E の定数倍となることはない。したがっ

て、前式が成り立つ条件は,

$$\begin{cases} 3a-2b-2=0 \\ -2a^2+5a+b^2-1=0 \end{cases}$$

である。第1式を変形すると,

$$b = \frac{3}{2}a - 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

となるので、これを第2式に代入して,

$$\begin{aligned} -2a^2 + 5a + \left(\frac{3}{2}a - 1\right)^2 - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow -8a^2 + 20a + (3a-2)^2 - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 + 8a &= 0 \\ \Leftrightarrow a(a+8) &= 0 \\ \therefore a &= 0, -8 \end{aligned}$$

と求まる。これを①に代入して、求める (a, b) の値は,

$$(a, b) = (0, -1), (-8, -13)$$

となる。

(答) $(a, b) = (0, -1), (-8, -13)$

II

(1)

$P \neq Q$ に注意し、 $Q(4\cos\theta, 4\sin\theta+4) \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi\right)$ とおく。

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4} \overrightarrow{OQ}$$

より、

$$M(\cos\theta, \sin\theta+1)$$

となる。 $M(x, y)$ とおくと、

$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos\theta \\ y-1 = \sin\theta \end{cases}$$

となるから、 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi$ と合わせて、点 M の軌跡は、

$$x^2 + (y-1)^2 = 1, \text{ただし, } (0, 0) \text{を除く}$$

と求まる。

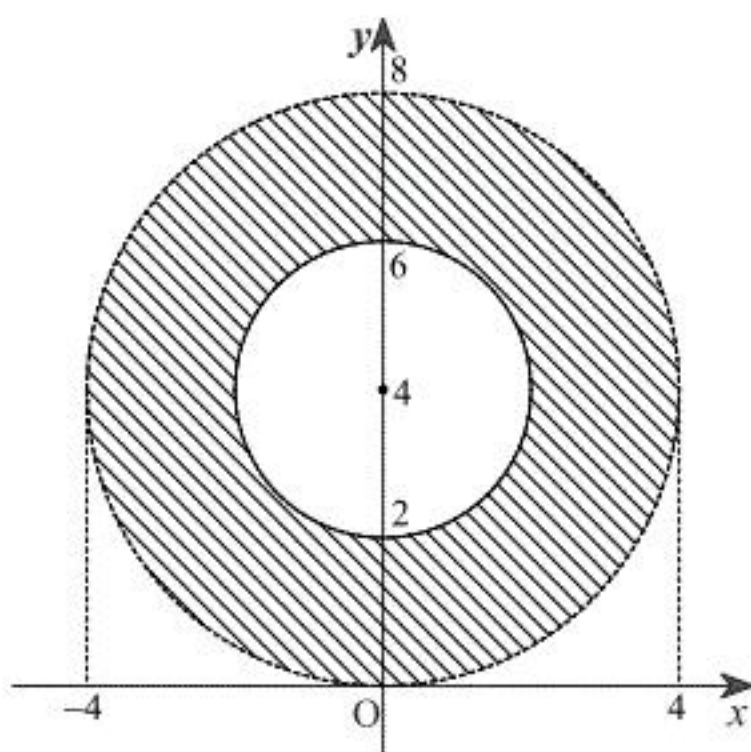
(答) $x^2 + (y-1)^2 = 1$, ただし, $(0, 0)$ を除く

(2)

(1)より、点 A を中心とする点対称性から、点 P を固定したときの点 M の通る領域は、点 P において円 C に内接する半径1の円から点 P を除いたものである。よって、点 P も動かしたとき、点 M の通る領域は、円 C に内接する半径1の円の通る領域から円 C を除いたものとなる。これは円 C の内部から、点 $(0, 4)$ を中心とする半径2の円を除いたものであり、すなわち、

$$4 \leq x^2 + (y-4)^2 < 16$$

である。これを図示すると次図のとおりである(ただし境界は実線を含み、点線を除く)。



(答) 前図(境界は実線を含み、点線を除く)

Ⅲ

(1)

$$\begin{aligned}\int x e^{-2x} dx &= -\frac{1}{2} x e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx \\ &= -\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + C \\ &= -\frac{1}{4} (2x+1) e^{-2x} + C \quad (C \text{ は積分定数})\end{aligned}$$

と求まる。また,

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{-2x} dx &= -\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} + \int x e^{-2x} dx \\ &= -\frac{1}{4} (2x^2 + 2x + 1) e^{-2x} + C \quad (C \text{ は積分定数})\end{aligned}$$

と求まる。

$$\begin{aligned}(\text{答}) \quad \int x e^{-2x} dx &= -\frac{1}{4} (2x+1) e^{-2x} + C \\ \int x^2 e^{-2x} dx &= -\frac{1}{4} (2x^2 + 2x + 1) e^{-2x} + C \\ &\quad (C \text{ は積分定数})\end{aligned}$$

(2)

定数 a を用いて, $\int_0^{\log 2} f(t) e^{-t} dt = a$ とおくと,

$$f(x) = (2x^2 + 3) e^{-x} + a$$

となるので,

$$\begin{aligned}\int_0^{\log 2} f(t) e^{-t} dt &= \int_0^{\log 2} \left\{ (2t^2 + 3) e^{-t} + a \right\} e^{-t} dt \\ &= \int_0^{\log 2} (2t^2 e^{-2t} + 3e^{-2t} + a e^{-t}) dt \\ &= \left[-\frac{1}{4} \cdot 2(2t^2 + 2t + 1) e^{-2t} - \frac{3}{2} e^{-2t} - a e^{-t} \right]_0^{\log 2} \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ 2(\log 2)^2 + 2\log 2 + 1 \right\} \cdot \frac{1}{4} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} - a \cdot \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 - \frac{3}{2} - a \right) \\ &= -\frac{1}{4} (\log 2)^2 - \frac{1}{4} \log 2 + \frac{a}{2} + \frac{3}{2}\end{aligned}$$

と求まる。よって, $\int_0^{\log 2} f(t) e^{-t} dt = a$ だから,

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4} (\log 2)^2 - \frac{1}{4} \log 2 + \frac{a}{2} + \frac{3}{2} &= a \\ \therefore a &= 3 - \frac{1}{2} (\log 2)^2 - \frac{1}{2} \log 2\end{aligned}$$

となる。以上より,

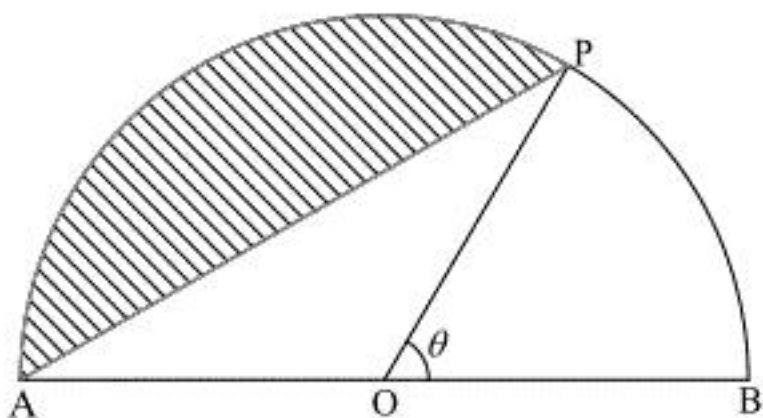
$$f(x) = (2x^2 + 3) e^{-x} + 3 - \frac{1}{2} (\log 2)^2 - \frac{1}{2} \log 2$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad f(x) = (2x^2 + 3) e^{-x} + 3 - \frac{1}{2} (\log 2)^2 - \frac{1}{2} \log 2$$

IV

(1)



求める面積は上図の黒色部の面積である。 $\angle BOP = \theta$ より、
 $\angle AOP = \pi - \theta$

であるから、求める面積を S_θ とすると、

$$\begin{aligned} S_\theta &= 1 \cdot 1 \cdot \pi \cdot \frac{\pi - \theta}{2\pi} - 1 \cdot 1 \cdot \sin(\pi - \theta) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\pi - \theta}{2} - \frac{\sin(\pi - \theta)}{2} \\ &= \frac{\pi - \theta}{2} - \frac{\sin \theta}{2} \\ &= \frac{1}{2}(\pi - \theta - \sin \theta) \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \frac{1}{2}(\pi - \theta - \sin \theta)$$

(2)

半円の面積は、

$$1 \cdot 1 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$$

であるから、 S_θ と半円の面積の半分が等しい時、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\pi - \theta - \sin \theta) &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \theta + \sin \theta &= \frac{\pi}{2} \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1} \end{aligned}$$

を満たす。また、弧 BP と弧 AP の半径が同じであるから、

$$\begin{aligned} 2 \text{ 弧 BP} &< \text{弧 AP} \\ \Leftrightarrow 2\theta &< \pi - \theta \\ \Leftrightarrow \theta &< \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

となる。同様に考えて、

$$\begin{aligned} \text{弧 AP} &< 3 \text{ 弧 BP} \\ \Leftrightarrow \pi - \theta &< 3\theta \\ \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} &< \theta \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} 2 \text{ 弧 BP} &< \text{弧 AP} < 3 \text{ 弧 BP} \\ \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} &< \theta < \frac{\pi}{3} \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。したがって、①を満たすとき θ は②を満たすことを示せばよい。

$$f(\theta) = \theta + \sin \theta - \frac{\pi}{2} \text{ とおくと、}$$

$$f'(\theta) = 1 + \cos \theta \geq 0$$

であるから、 $f(\theta)$ は単調増加する。

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{2} \\ &< \frac{1.42}{2} - \frac{3.14}{4} \\ &= 0.71 - 0.785 \\ &< 0 \\ f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \\ &> \frac{1.73}{2} - \frac{3.15}{6} \\ &= 0.685 - 0.525 \\ &> 0 \end{aligned}$$

であるから、 $f(\theta) = 0$ は $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{3}$ に唯1つの解を持つ。したがって、弦 AP が半円を2等分

するとき、 θ は、 $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{3}$ を満たす。したがって、

$$2 \text{ 弧 BP} < \text{弧 AP} < 3 \text{ 弧 BP}$$

を満たす。

(証明終)