

(1)

与えられた3次方程式の左辺は

$$\begin{aligned} & (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \\ &= x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma \end{aligned}$$

と表される。各係数を比較することにより

$$\begin{cases} a = -(\alpha + \beta + \gamma) \\ b = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \\ c = -\alpha\beta\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -a \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = b \\ \alpha\beta\gamma = -c \end{cases}$$

とわかる。

(証明終)

(2)

まず、 $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$ を求める。

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$$

であるから、(1)の結論を用いると

$$\begin{aligned} 1^2 &= 3 + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ \Leftrightarrow \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha &= -1 \end{aligned}$$

となる。次に、 $\alpha\beta\gamma$ を求める。

$$\begin{aligned} & (\alpha + \beta + \gamma)^3 \\ &= (\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3) + 3(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - 3\alpha\beta\gamma \end{aligned}$$

であるから、(1)の結論、および先ほど導いた式を用いると

$$\begin{aligned} 1^3 &= 7 + 3 \cdot 1 \cdot (-1) - 3\alpha\beta\gamma \\ \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma &= 1 \end{aligned}$$

とわかる。また、

$$\begin{aligned} & (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 \\ &= (\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2) + 2(\alpha^2\beta\gamma + \alpha\beta^2\gamma + \alpha\beta\gamma^2) \\ &= (\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2) + 2\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) \end{aligned}$$

であるから、仮定、および上で導いた式を用いると

$$\begin{aligned} (-1)^2 &= (\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2) + 2 \cdot 1 \cdot 1 \\ \Leftrightarrow \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 &= -1 \end{aligned}$$

となる。これを用いると

$$\begin{aligned} & \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 \\ &= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 - 2(\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2) \\ &= 3^2 - 2 \cdot (-1) \\ &= 11 \end{aligned}$$

とわかる。

II

(1)

三角形OPQの面積は三角形OABの面積の半分となるから、点Pの座標を $(s, 0)$ とすると

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}st &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \\ \Leftrightarrow s &= \frac{2}{t}\end{aligned}$$

となる。よって、直線PQの方程式は

$$\begin{aligned}y - t &= \frac{t-0}{0-\frac{2}{t}}x \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{t^2}{2}x + t\end{aligned}$$

である。また、このとき $0 < t \leq 2$ かつ $0 < s \leq 2$ となるから、 t の値の範囲は

$$\begin{aligned}0 < t \leq 2 \text{ かつ } 0 < \frac{2}{t} \leq 2 \\ \Leftrightarrow 1 \leq t \leq 2\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \text{ 直線 PQ の方程式: } y = -\frac{t^2}{2}x + t, t \text{ の値の範囲: } 1 \leq t \leq 2$$

(2)

$1 \leq t \leq 2$ で t を動かすときに直線PQが点 (X, Y) を通ることは

$$Y = -\frac{t^2}{2}X + t \quad \dots \textcircled{1}$$

を t の2次方程式とみたときに $1 \leq t \leq 2$ をみたす解をもつことと同値である。①を変形すると

$$Xt^2 - 2t + 2Y = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。ここで、

$$f(t) = Xt^2 - 2t + 2Y$$

とおき、②の判別式を D とする。以下、解の値およびその個数で場合分けをして、満たすべき条件を考える。

[1] $t=1$ を解にもつとき

$$\textcircled{1} \text{ に } t=1 \text{ を代入して, } Y = -\frac{1}{2}X + 1 \text{ となる。}$$

[2] $t=2$ を解にもつとき

$$\textcircled{1} \text{ に } t=2 \text{ を代入して, } Y = -2X + 2 \text{ となる。}$$

[3] $1 < t < 2$ で、異なる2つの解または重解をもつとき

[i] 判別式 D について

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 1 - 2XY &\geq 0 \\ \therefore Y &\leq \frac{1}{2X} \\ \text{が成り立つ。}\end{aligned}$$

[ii] グラフ $y=f(t)$ の軸の位置について

$$\begin{aligned}1 &\leq \frac{1}{X} \leq 2 \\ \therefore \frac{1}{2} &\leq X \leq 1 \\ \text{が成り立つ。}\end{aligned}$$

[iii] $f(1) > 0$ となるから

$$\begin{aligned}X - 2 + 2Y &> 0 \\ \therefore Y &> -\frac{1}{2}X + 1\end{aligned}$$

である。

[iv] $f(2) > 0$ となるから

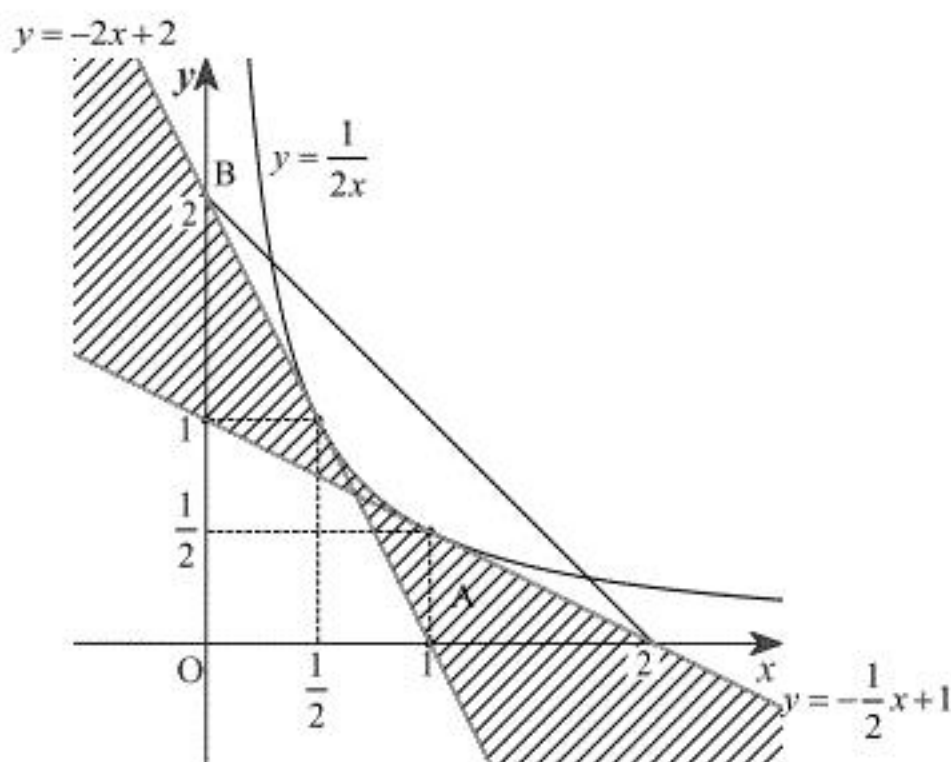
$$\begin{aligned}4X - 4 + 2Y &> 0 \\ \therefore Y &> -2X + 2 \\ \text{である。}\end{aligned}$$

以上、[i], [ii], [iii], [iv]をすべてみたす。

[4] $1 < t < 2$ で解を1つだけもつとき

$$\begin{aligned}f(1)f(2) < 0, \text{ すなわち, } Y > -\frac{1}{2}X + 1 \text{ かつ } Y < -2X + 2, \text{ または, } Y < -\frac{1}{2}X + 1 \text{ かつ } \\ Y > -2X + 2 \text{ をみたす。}\end{aligned}$$

以上、[1], [2], [3], [4]より、求めるべき領域は下図のようになる。ただし、全ての境界線を含む。



(答) 前図

Ⅲ

(1)

$f(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x + \alpha)e^{-x} - (x^2 + \alpha x + \beta)e^{-x} \\ &= \{-x^2 + (2 - \alpha)x + \alpha - \beta\}e^{-x} \end{aligned}$$

となる。 $f'(x)$ をさらに微分すると

$$\begin{aligned} f''(x) &= \{-2x + (2 - \alpha)\}e^{-x} - \{-x^2 + (2 - \alpha)x + (\alpha - \beta)\}e^{-x} \\ &= \{x^2 + (\alpha - 4)x - 2\alpha + \beta + 2\}e^{-x} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \begin{cases} f'(x) = \{-x^2 + (2 - \alpha)x + \alpha - \beta\}e^{-x} \\ f''(x) = \{x^2 + (\alpha - 4)x - 2\alpha + \beta + 2\}e^{-x} \end{cases}$$

(2)

$x=1$ で極値をとるための必要十分条件は、 $f'(1)=0$ かつ $f''(1) \neq 0$ である。 $f'(1)=0$ より

$$\begin{aligned} f'(1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \{-1 + (2 - \alpha) + \alpha - \beta\}e^{-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 - \beta &= 0 \\ \therefore \beta &= 1 \end{aligned}$$

である。また、 $f''(1) \neq 0$ より

$$\begin{aligned} f''(1) &\neq 0 \\ \Leftrightarrow \{1 + (\alpha - 4) - 2\alpha + \beta + 2\}e^{-1} &\neq 0 \\ \Leftrightarrow -\alpha + \beta - 1 &\neq 0 \\ \therefore \alpha &\neq 0 \end{aligned}$$

である。したがって、求める条件は $\alpha \neq 0$ かつ $\beta = 1$ である。

(答) $\alpha \neq 0$ かつ $\beta = 1$

(3)

点 $(4, f(4))$ が曲線 $y = f(x)$ の変曲点となるための必要条件は

$$\begin{aligned} f''(4) &= 0 \\ \Leftrightarrow \{16 + (\alpha - 4) \cdot 4 - (2\alpha - \beta - 2)\}e^{-4} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\alpha + \beta + 2 &= 0 \end{aligned}$$

である。ここで、(2)の結果より、 $f(x)$ が $x=1$ で極値をとるとき、 $\beta=1$ であるから

$$\begin{aligned} 2\alpha + 1 + 2 &= 0 \\ \therefore \alpha &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

となる。このとき、 $f(x)$ 、 $f'(x)$ 、 $f''(x)$ に、求めた α 、 β の値をそれぞれ代入すると

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x^2 - \frac{3}{2}x + 1\right)e^{-x} \\ f'(x) &= \left(-x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{5}{2}\right)e^{-x} \\ &= -(x-1)\left(x - \frac{5}{2}\right)e^{-x} \\ f''(x) &= \left(x^2 - \frac{11}{2}x + 6\right)e^{-x} \\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right)(x-4)e^{-x} \end{aligned}$$

となるから、 $f(x)$ の増減表をかくと以下のようになる。

x	...	1	...	$\frac{3}{2}$	...	$\frac{5}{2}$	...	4	...
$f'(x)$	-	0	+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	+	+	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$		$\frac{1}{2}e^{-1}$		$e^{-\frac{3}{2}}$		$\frac{7}{2}e^{-\frac{5}{2}}$		$11e^{-4}$	

よって、点 $(4, f(4))$ は曲線 $y = f(x)$ の変曲点となる。また、関数 $y = f(x)$ は $x=1$ で極小値

$\frac{1}{2}e^{-1}$ 、 $x = \frac{5}{2}$ で極大値 $\frac{7}{2}e^{-\frac{5}{2}}$ をとる。その曲線の変曲点は $\left(\frac{3}{2}, e^{-\frac{3}{2}}\right)$ 、 $(4, 11e^{-4})$ である。

(答) 前述

IV

(1)

試行の回数によって場合分けをする。

[1] 試行が 2 回のとき

赤玉が 2 回続けて出るから、その確率は

$$p^2$$

となる。

[2] 試行が 3 回のとき

3 回目で赤玉が出て、1, 2 回目に赤玉と白玉が 1 回ずつ出るから、その確率は

$${}_2C_1 \cdot p^2 \cdot (1-p) = 2p^2(1-p)$$

となる。

以上, [1], [2] は互いに排反な事象であるから、求める確率は

$$2p^2(1-p) + p^2 = -2p^3 + 3p^2$$

である。

$$(\text{答}) -2p^3 + 3p^2$$

(2)

(1) と同様に、試行の回数によって場合分けをする。

[1] 試行が 2 回のとき

赤玉が 2 回続けて出るから、その確率は

$$p^2$$

となる。

[2] 試行が 3 回のとき

白玉、赤玉、赤玉の順で出るから、その確率は

$$p^2(1-p)$$

となる。

[3] 試行が 4 回のとき

白玉、白玉、赤玉、赤玉、または、赤玉、白玉、赤玉、赤玉の順で出るから、その確率は

$$p^2(1-p)^2 + p^3(1-p) = -p^3 + p^2$$

となる。

以上, [1], [2], [3] は互いに排反な事象であるから、求める確率は

$$p^2 + p^2(1-p) - p^3 + p^2 = -2p^3 + 3p^2$$

となる。

$$(\text{答}) -2p^3 + 3p^2$$

(3)

n の偶奇によって場合分けをする。

[1] n が偶数のとき

試行を 2 回ずつに区切って考える。 m を自然数として、 $2m$ 回目に試行が終わるとき、最後の 2 回は赤玉が連続して出て、それまでは 2 回ごとに赤玉と白玉が 1 回ずつ出る。よって、 $2m$ 回目に赤玉が 2 回多く出て試行が終わる確率は

$$\{2p(1-p)\}^{m-1} p^2$$

となる。したがって、求める確率は

$$\sum_{m=1}^{\frac{n}{2}} \{2p(1-p)\}^{m-1} \cdot p^2 = \frac{p^2 \left[\{2p(1-p)\}^{\frac{n}{2}} - 1 \right]}{2p(1-p) - 1}$$

となる。

[2] n が奇数のとき

奇数回目の試行で、赤玉を取り出した回数と白玉を取り出した回数の差が 2 になることはありえない。したがって、求める確率は、[1] で求めた確率において $n \rightarrow n-1$ と置き換えたときの確率に等しいから

$$\frac{p^2 \left[\{2p(1-p)\}^{\frac{n-1}{2}} - 1 \right]}{2p(1-p) - 1}$$

である。

以上, [1], [2] より、求める確率は

$$n \text{ が偶数のとき, } \frac{p^2 \left[\{2p(1-p)\}^{\frac{n}{2}} - 1 \right]}{2p(1-p) - 1}$$

$$n \text{ が奇数のとき, } \frac{p^2 \left[\{2p(1-p)\}^{\frac{n-1}{2}} - 1 \right]}{2p(1-p) - 1}$$

である。

$$(\text{答}) \text{ 前述}$$