

I

$$\begin{array}{ll}
 (1) & \\
 & xy=1 \quad \dots\dots ① \\
 & z+w=1 \quad \dots\dots ② \\
 & xw+yz=1 \quad \dots\dots ③ \\
 & yzw=1 \quad \dots\dots ④
 \end{array}$$

とする。 $|x| \neq 1$ であることを背理法により示す。

[1] $x=1$ であると仮定する。

このとき、①より $y=1$ となるから、②、③、④より

$$z+w=1, zw=1$$

である。したがって、 z, w は 2 次方程式 $t^2 - t + 1 = 0$ の 2 解であるが、判別式は

$$(-1)^2 - 4 = -3 < 0$$

より、この 2 次方程式は異なる 2 つの虚数解をもつ。しかし、これは z, w が実数であることに矛盾する。したがって、 $x \neq 1$ となる。

[2] $x=-1$ であると仮定する。

このとき、①より $y=-1$ となるから、③より

$$-z-w=1 \quad \therefore z+w=-1$$

となる。これは、②と矛盾する。したがって、 $x \neq -1$ となる。

以上[1], [2]より、 $|x| \neq 1$ であることが示された。

(証明終)

$$\begin{array}{ll}
 (2) & \\
 & \text{③の両辺に } x \text{ をかけると、} \\
 & x^2w + xyz = x \\
 & \Leftrightarrow x^2w + z = x \quad (\because ①) \\
 & \Leftrightarrow x^2w + 1 - w = x \quad (\because ②) \\
 & \Leftrightarrow (x^2 - 1)w = x - 1 \\
 & \therefore w = \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x+1} \quad (\because |x| \neq 1 \Rightarrow x^2 - 1 \neq 0) \quad \dots\dots ⑤
 \end{array}$$

となる。よって、②より

$$z = 1 - w = \frac{x}{x+1} \quad \dots\dots ⑥$$

である。また、①において、 $x=0$ と仮定すると $0=1$ となり矛盾する。したがって、 $x \neq 0$ で、

$$y = \frac{1}{x} \quad \dots\dots ⑦$$

となる。⑤、⑥、⑦を④に代入すると

$$\begin{array}{l}
 \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{x+1} \cdot \frac{1}{x+1} = 1 \\
 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 1 \\
 \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \\
 \therefore x = -2 \quad (\because x \neq 0)
 \end{array}$$

を得る。したがって、⑤、⑥、⑦より $y = -\frac{1}{2}, z = 2, w = -1$ を得る。

$$(\text{答}) (x, y, z, w) = \left(-2, -\frac{1}{2}, 2, -1\right)$$

II

(1)

$M(X, Y)$, $P(p, q)$ とおく。点 M が線分 AP の中点であることから、

$$(X, Y) = \left(\frac{0+p}{2}, \frac{-2+q}{2} \right) \\ \therefore (p, q) = (2X, 2Y+2)$$

となる。点 P は円 C 上を動く点であるから、

$$p^2 + (q-2)^2 = 4 \\ \Leftrightarrow (2X)^2 + \{(2Y+2)-2\}^2 = 4 \\ \Leftrightarrow X^2 + Y^2 = 1$$

となる。したがって、点 M の軌跡は、円 $x^2 + y^2 = 1$ である。

(答) 円 $x^2 + y^2 = 1$

(2)

$M(X, Y)$ 、直線 ℓ 上の任意の点を $L(x, y)$ とおく。(1)より $X^2 + Y^2 = 1$ を常に満たすことに注意する。直線 ℓ の方程式は、

$$\overline{ML} \cdot \overline{AM} = 0 \\ \Leftrightarrow X(x-X) + (Y+2)(y-Y) = 0 \\ \Leftrightarrow Xx + (Y+2)y - 2Y - 1 = 0 \quad (\because X^2 + Y^2 = 1)$$

となる。直線 ℓ が円 C に接することから、円 C の中心 $(0, 2)$ と直線 ℓ の距離が 2 となる。すなわち、

$$\frac{|2(Y+2)-2Y-1|}{\sqrt{X^2 + (Y+2)^2}} = 2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{X^2 + (Y+2)^2} = \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow X^2 + (Y+2)^2 = \frac{9}{4} \\ \Leftrightarrow (1-Y^2) + Y^2 + 4Y + 4 = \frac{9}{4} \quad (\because X^2 + Y^2 = 1) \\ \therefore Y = -\frac{11}{16}, X = \pm\sqrt{1-Y^2} = \pm\frac{3\sqrt{15}}{16}$$

となる。したがって、 $M\left(\pm\frac{3\sqrt{15}}{16}, -\frac{11}{16}\right)$ である。

(答) $M\left(\pm\frac{3\sqrt{15}}{16}, -\frac{11}{16}\right)$

(3)

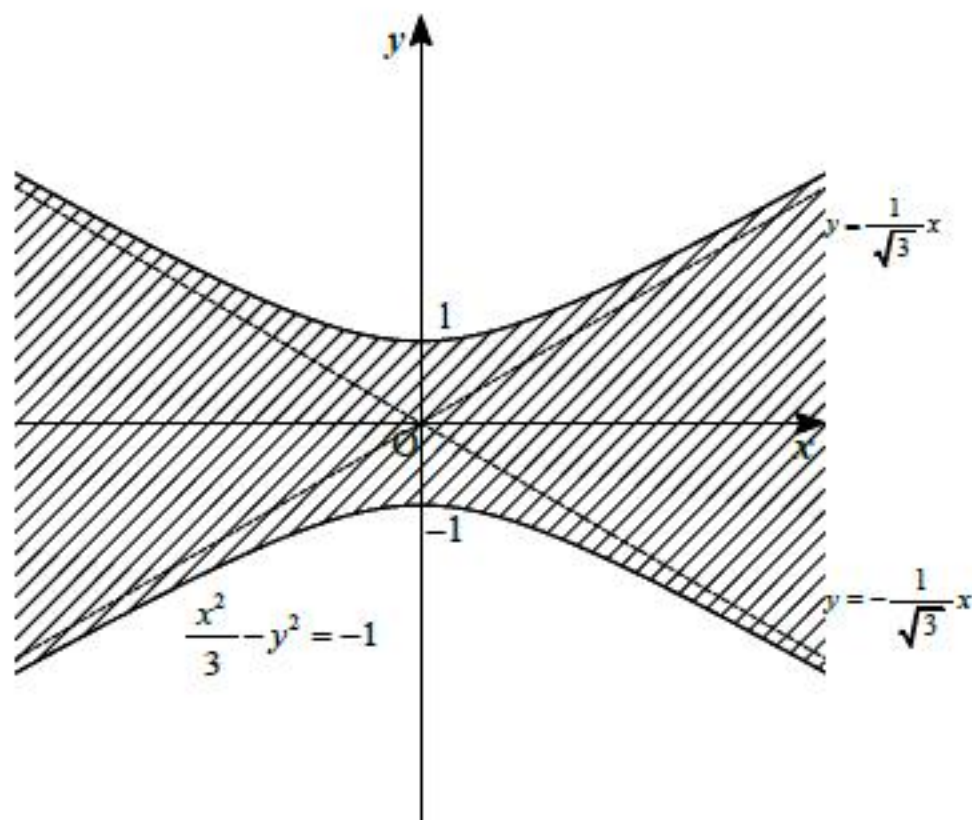
直線 ℓ の方程式は

$$Xx + (Y+2)y - 2Y - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow xX + (y-2)Y + 2y - 1 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。 $(x, y) = (0, 2)$ のとき、 $\textcircled{1}$ は成立しないので、 $(x, y) \neq (0, 2)$ であることに注意する。 $X^2 + Y^2 = 1$ かつ $\textcircled{1}$ を満たすような (X, Y) が存在するための (x, y) の必要十分条件を求めればよい。 XY 平面において、原点と直線 $\textcircled{1}$ の距離が 1 以下であればよいので

$$\frac{|2y-1|}{\sqrt{x^2 + (y-2)^2}} \leq 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-2)^2} \geq |2y-1| \quad (\geq 0) \\ \Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 \geq (2y-1)^2 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2}{3} - y^2 \geq -1$$

となる。このとき、 $(x, y) \neq (0, 2)$ は成り立つ。以上より、求める領域は下図の斜線部分となる。境界上の点も含む。



(答) 前図

Ⅲ

(1)

$f(x) = x \cos x - \sin x$ とおく。 $f(x) = 0$ を満たす x は、 $\frac{4}{3}\pi < x < 2\pi$ の範囲ではただ 1 つであることを示せばよい。

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x - x \sin x - \cos x \\ &= -x \sin x > 0 \quad \left(\because \frac{4}{3}\pi < x < 2\pi \right) \end{aligned}$$

より、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\frac{4}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		+	
$f(x)$		$\nearrow$	

ここで、

$$\begin{aligned} f(2\pi) &= 2\pi > 0, \\ f\left(\frac{4}{3}\pi\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{3}\pi \\ &= \frac{3\sqrt{3} - 4\pi}{6} \\ &< \frac{6 - 4\pi}{6} < 0 \end{aligned}$$

である。よって、 $f(x) = 0$ を満たす x は、 $\frac{4}{3}\pi < x < 2\pi$ の範囲ではただ 1 つである。

(証明終)

(2)

[1] $-\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} > -\frac{3}{4\pi}$ を示す。

$$\frac{4}{3}\pi < \alpha < 2\pi \text{ より}$$

$$\sqrt{1+\alpha^2} > \sqrt{\alpha^2} = \alpha > \frac{4}{3}\pi (> 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} < \frac{3}{4\pi}$$

$$\therefore -\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} > -\frac{3}{4\pi}$$

となるから、示された。

[2] $0 < x < 2\pi$ において、 $\frac{\sin x}{x} \geq -\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$ が成り立つことを示す。

$g(x) = \frac{\sin x}{x}$ とおく。 $0 < x \leq \pi$ においては、 $g(x) \geq 0$ 、 $-\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} < 0$ より、不等式は成り立つ。以下、 $\pi < x < 2\pi$ のときについて考える。

$$g'(x) = \frac{\cos x \cdot x - \sin x \cdot 1}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2}$$

となる。ここで、 $\pi < x < 2\pi$ において $f'(x) > 0$ より、 $f(x)$ は単調増加であることに注意すると、 $g(x)$ の増減表は次のようになる。

x	π	$\cdots$	α	$\cdots$	2π
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

したがって、 $\pi < x < 2\pi$ においては $g(x) \geq g(\alpha)$ である。ここで、

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin \alpha &= \alpha \cos \alpha \\ \Leftrightarrow \tan \alpha &= \alpha \quad (\because \cos \alpha \neq 0) \end{aligned}$$

であることに注意すると、

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= \frac{\sin \alpha}{\alpha} \\ &= \cos \alpha \\ &= -\sqrt{\cos^2 \alpha} \quad \left(\because \cos \alpha = \frac{\sin \alpha}{\alpha} < 0 \right) \\ &= -\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2 \alpha}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \end{aligned}$$

となる。したがって、 $\pi < x < 2\pi$ のとき、

$$g(x) = \frac{\sin x}{x} \geq -\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} = g(\alpha)$$

より、示された。

以上[1], [2]より、題意の不等式は示された。

(証明終)

IV

(1)

$$\begin{aligned}\int_0^x 2tg(t)dt &= \int_0^x 2ate^{t^2} dt \\ &= \left[ae^{t^2} \right]_0^x \\ &= a(e^{x^2} - 1)\end{aligned}$$

$$\therefore a + \int_0^x 2tg(t)dt = ae^{x^2} = g(x)$$

より、題意は示された。

(証明終)

(2)

$$h'(x) = e^{-x^2} \cdot 2xf'(x) - 2xe^{-x^2} \int_0^x 2tf'(t)dt$$

であるから、 $x > 0$ のとき、 $f(x) \leq a + \int_0^x 2tf'(t)dt$ であることに注意すると

$$\begin{aligned}& 2axe^{-x^2} - h'(x) \\ &= 2xe^{-x^2} \left\{ a - f(x) + \int_0^x 2tf'(t)dt \right\} \\ &\geq 2xe^{-x^2} \left\{ a - \left(a + \int_0^x 2tf'(t)dt \right) + \int_0^x 2tf'(t)dt \right\} = 0 \\ &\therefore h'(x) \leq 2axe^{-x^2}\end{aligned}$$

となり、題意は示された。

(証明終)

(3)

(2)で示した不等式は、 $x = 0$ においても成り立つ。よって、 $x \geq 0$ において

$$h'(x) \leq 2axe^{-x^2}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}\int_0^x h'(t)dt &\leq \int_0^x 2ate^{-t^2} dt \\ \Leftrightarrow \left[h(t) \right]_0^x &\leq \left[-ae^{-t^2} \right]_0^x \\ \Leftrightarrow h(x) - h(0) &\leq a - ae^{-x^2} \\ \Leftrightarrow e^{-x^2} \int_0^x 2tf'(t)dt &\leq a - ae^{-x^2} \\ \Leftrightarrow \int_0^x 2tf'(t)dt &\leq ae^{x^2} - a \\ \therefore g(x) = ae^{x^2} &\geq a + \int_0^x 2tf'(t)dt \geq f(x)\end{aligned}$$

となり、題意は示された。

(証明終)