

整式 $(x^2+x+1)^n$ を整式 x^3+x^2-x-1 で割ったときの商を $P(x)$ 、余りを $a_n x^2 + b_n x + c_n$ とおくと、

$$\begin{aligned}(x^2+x+1)^n &= P(x)(x^3+x^2-x-1) + a_n x^2 + b_n x + c_n \\ \Leftrightarrow (x^2+x+1)^n &= P(x)(x+1)^2(x-1) + a_n x^2 + b_n x + c_n \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

と一通りに表せる。ここで、①に $x=-1, 1$ を代入することにより、関係式

$$\begin{cases} 1 = a_n - b_n + c_n & \dots \textcircled{2} \\ 3^n = a_n + b_n + c_n & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

が得られる。また、①の両辺を x で微分することにより

$$n(x^2+x+1)^{n-1} \cdot (2x+1) = 2P(x)(x-1)(x+1) + \{P(x)(x-1)\}'(x+1)^2 + 2a_n x + b_n$$

であるから、これに $x=-1$ を代入することにより、関係式

$$-n = -2a_n + b_n \quad \dots \textcircled{4}$$

が得られる。したがって、②、③、④を連立して解くことにより

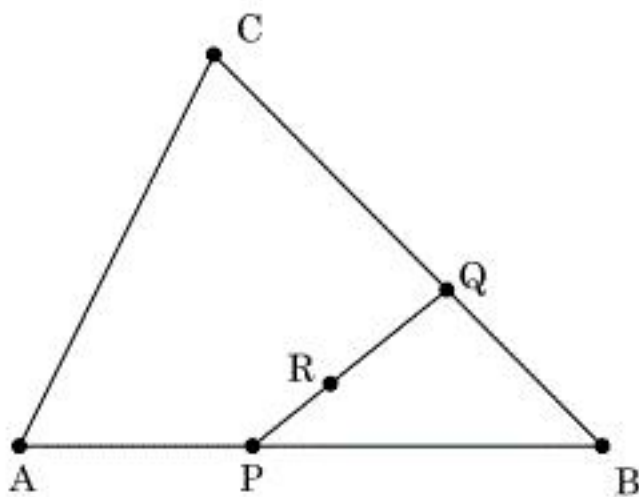
$$\begin{cases} a_n = \frac{3^n + 2n - 1}{4} \\ b_n = \frac{3^n - 1}{2} \\ c_n = \frac{3^n - 2n + 3}{4} \end{cases}$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} a_n = \frac{3^n + 2n - 1}{4} \\ b_n = \frac{3^n - 1}{2} \\ c_n = \frac{3^n - 2n + 3}{4} \end{cases}$$

Ⅱ

(1)



点 $P(\vec{p})$, $Q(\vec{q})$ はそれぞれ線分 AB , BC を $m:n$ に内分する点であるから,

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \frac{n}{m+n}\vec{a} + \frac{m}{m+n}\vec{b} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b} \\ \vec{q} &= \frac{n}{m+n}\vec{b} + \frac{m}{m+n}\vec{c} = (1-t)\vec{b} + t\vec{c}\end{aligned}$$

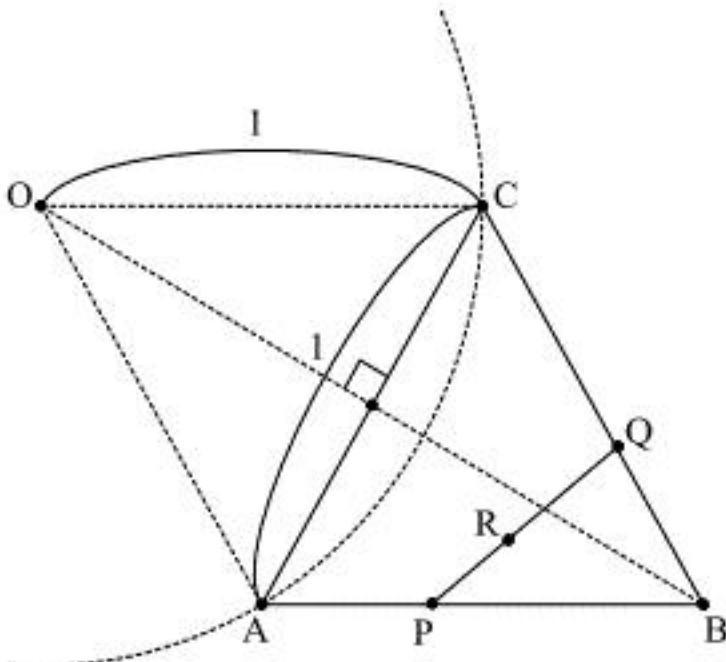
と表せる。また, 点 $R(\vec{r})$ も線分 PQ を $m:n$ に内分する点であるから,

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \frac{n}{m+n}\vec{p} + \frac{m}{m+n}\vec{q} \\ &= (1-t)\vec{p} + t\vec{q} \\ &= (1-t)\{(1-t)\vec{a} + t\vec{b}\} + t\{(1-t)\vec{b} + t\vec{c}\} \\ &= (1-t)^2\vec{a} + 2t(1-t)\vec{b} + t^2\vec{c}\end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad (1-t)^2\vec{a} + 2t(1-t)\vec{b} + t^2\vec{c}$$

(2)



線分 OR の長さが 1 より大きいことを示せばよい。以下点 O の位置ベクトルを $\vec{o}$ とする。まず三角形 ABC は正三角形であるから, 線分 AC と線分 OB の中点は一致するため

$$\begin{aligned}\frac{\vec{o} + \vec{b}}{2} &= \frac{\vec{a} + \vec{c}}{2} \\ \therefore \vec{o} &= \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\end{aligned}$$

と表せる。よって $\overrightarrow{OR}$ は, (1)の結果より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= \vec{r} - \vec{o} \\ &= \{(1-t)^2 - 1\}\vec{a} + \{2t(1-t) + 1\}\vec{b} + \{t^2 - 1\}\vec{c} \\ &= (t^2 - 2t)\vec{a} + (-2t^2 + 2t + 1)\vec{b} + (t^2 - 1)\vec{c} \\ &= (t^2 - 2t)\vec{a} + \{-(t^2 - 2t) - (t^2 - 1)\}\vec{b} + (t^2 - 1)\vec{c} \\ &= (t^2 - 2t)\overrightarrow{BA} + (t^2 - 1)\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

と表せる。ここで, 三角形 ABC は正三角形であることから

$$|\overrightarrow{BA}| = 1, |\overrightarrow{BC}| = 1, \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

であるため,

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OR}|^2 &= (t^2 - 2t)^2 \cdot |\overrightarrow{BA}|^2 + (t^2 - 1)^2 |\overrightarrow{BC}|^2 + 2(t^2 - 2t)(t^2 - 1)\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= (t^2 - 2t)^2 + (t^2 - 1)^2 + (t^2 - 1)(t^2 - 2t) \\ &= 3t^4 - 6t^3 + t^2 + 2t + 1\end{aligned}$$

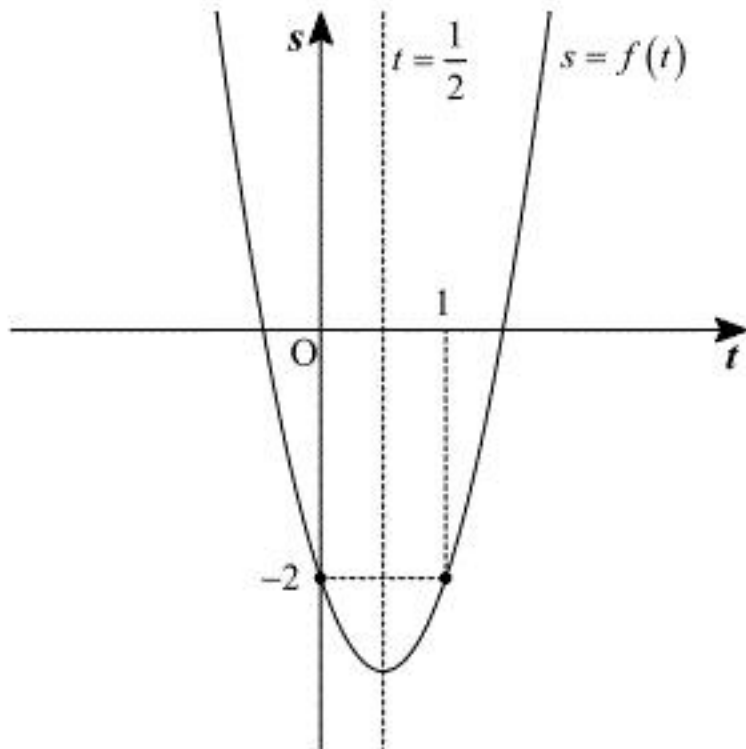
となる。よって, $0 < t < 1$ のとき

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OR}| &> 1 \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{OR}|^2 &> 1 \\ \Leftrightarrow 3t^4 - 6t^3 + t^2 + 2t + 1 &> 1 \\ \Leftrightarrow 3t^4 - 6t^3 + t^2 + 2t &> 0 \\ \Leftrightarrow t(t-1)(3t^2 - 3t - 2) &> 0 \\ \Leftrightarrow 3t^2 - 3t - 2 &< 0 \quad (\because 0 < t < 1) \quad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

を示せばよいことになる。ここで, 関数 $f(t)$ を $f(t) = 3t^2 - 3t - 2$ とおくと

$$f(t) = 3\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{11}{4}, f(0) = f(1) = -2 (< 0)$$

となるため, $0 < t < 1$ の範囲で①が成立することがわかる。



(証明終)

Ⅲ

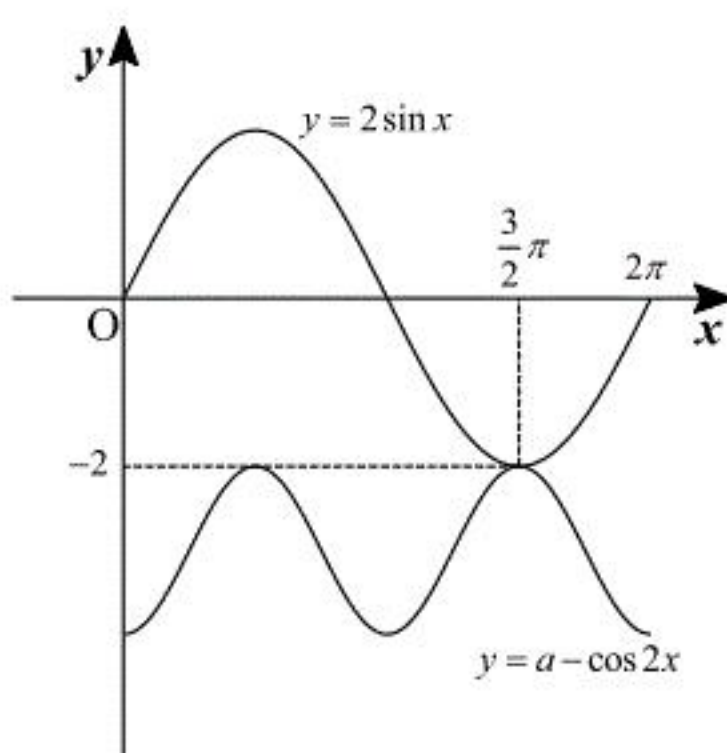
関数 $f(x)$, $g(x)$ を $f(x) = 2\sin x$, $g(x) = a - \cos 2x$ と定める。 xy 平面上において $y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフが $0 < x < 2\pi$ において接する条件は

$$\begin{cases} f(t) = g(t) & \dots \textcircled{1} \\ f'(t) = g'(t) & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

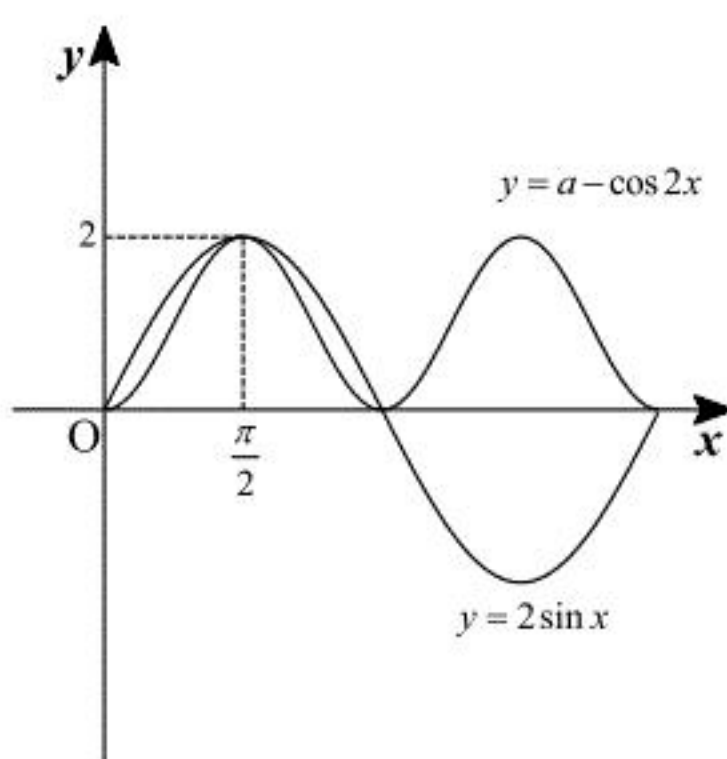
を満たす t が $0 < t < 2\pi$ の範囲に存在することである。 $\textcircled{1}$ かつ $\textcircled{2}$ を $0 < t < 2\pi$ の範囲で同値変形すると

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2\sin t = a - \cos 2t \\ 2\cos t = 2\sin 2t \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2\sin t + \cos 2t \\ \cos t(2\sin t - 1) = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2\sin t + \cos 2t \\ t = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi \end{cases} \\ & \Leftrightarrow (t, a) = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, 1\right), \left(\frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{2}\pi, -3\right) \end{aligned}$$

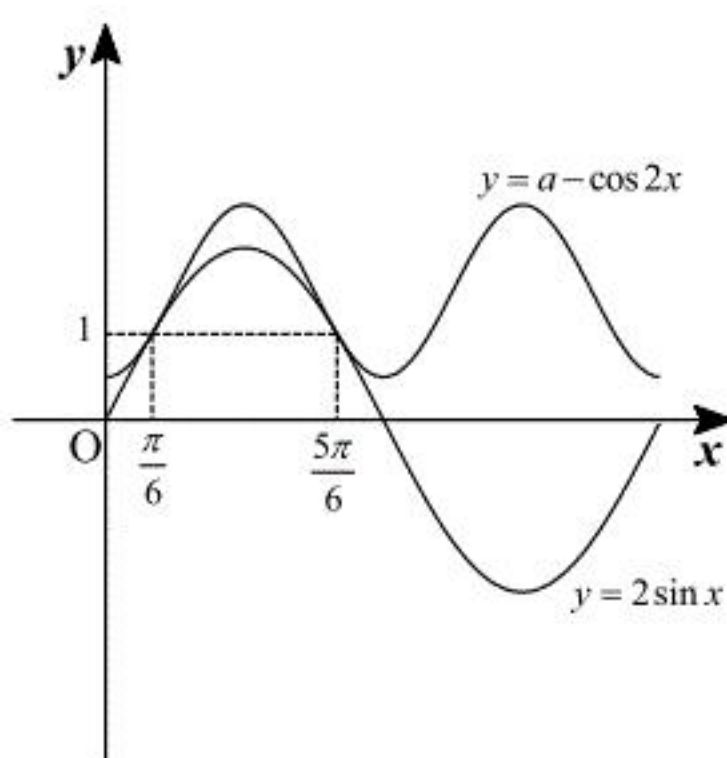
となる。したがって、求める a の値は $-3, 1, \frac{3}{2}$ であり、2つのグラフは $a = -3$ のとき



のようになり、 $a = 1$ のとき



のようになり、 $a = \frac{3}{2}$ のとき



のようになる。

(答) $a = -3, 1, \frac{3}{2}$, グラフは前図

IV

(1)

$f_0(x) = \log(x+1)$ とする。被積分関数を $f(x)$ について平方完成すると

$$\begin{aligned} 2f(x)\log(x+1) - \{f(x)\}^2 &= -\{f(x) - \log(x+1)\}^2 + \{\log(x+1)\}^2 \\ &= -\{f(x) - f_0(x)\}^2 + \{f_0(x)\}^2 \end{aligned}$$

となる。よって、区間 $[0, 1]$ で定義された任意の連続関数 $f(x)$ に対し、不等式

$$\{f_0(x)\}^2 \geq -\{f(x) - f_0(x)\}^2 + \{f_0(x)\}^2 = 2f(x)\log(x+1) - \{f(x)\}^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

がすべての実数 x に対して成立し、また、 $f(x) = f_0(x)$ を満たす実数 x で等号が成立することがわかる。ここで、 $f(x)$ は連続関数であるから、不等式①の両辺について、区間 $[0, 1]$ における定積分を考えると

$$\int_0^1 \{f_0(x)\}^2 dx \geq \int_0^1 [2f(x)\log(x+1) - \{f(x)\}^2] dx \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成立し、さらに、すべての実数 x に対して $f(x) = f_0(x)$ が成立するときに、不等式②の等号が成立することがわかる。従って、 I の値を最大にする $f(x)$ は $f_0(x) = \log(x+1)$ である。

(答) $\log(x+1)$

(2)

不定積分 $\int \{f_0(x)\}^2 dx = \int \{\log(x+1)\}^2 dx$ を、部分積分法を用いて計算すると

$$\begin{aligned} \int \{\log(x+1)\}^2 dx &= \int (x+1)' \{\log(x+1)\}^2 dx \\ &= (x+1)\{\log(x+1)\}^2 - 2 \int (x+1)\log(x+1)\{\log(x+1)\}' dx \\ &= (x+1)\{\log(x+1)\}^2 - 2 \int \log(x+1) dx \\ &= (x+1)\{\log(x+1)\}^2 - 2(x+1)\log(x+1) + 2 \int dx \\ &= (x+1)\{\log(x+1)\}^2 - 2(x+1)\log(x+1) + 2x + C \end{aligned}$$

となる。ただし、 C は積分定数である。したがって(1)の結果より、 I の最大値は

$$\begin{aligned} \int_0^1 \{\log(x+1)\}^2 dx &= \left[(x+1)\{\log(x+1)\}^2 - 2(x+1)\log(x+1) + 2x \right]_0^1 \\ &= \{2(\log 2)^2 - 4\log 2 + 2\} - (0 - 0 + 0) \\ &= 2(\log 2)^2 - 4\log 2 + 2 \end{aligned}$$

と計算できる。

(答) $2(\log 2)^2 - 4\log 2 + 2$