

I

(1)

点 P は線分 BC 上にあるので、 $0 \leq s \leq 1$ を満たす実数 s を用いて

$$\overrightarrow{OP} = (1-s)\vec{b} + s\vec{c} \qquad \dots \textcircled{1}$$

と表せる。一方、条件より $\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD} &= \frac{2}{3}\vec{a} \\ \overrightarrow{OE} &= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} \\ \overrightarrow{OF} &= \frac{1}{3}\vec{c} \end{aligned}$$

と表すことができる。これより

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DE} &= \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD} \\ &= -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} \\ \overrightarrow{DF} &= \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OD} \\ &= -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c} \end{aligned}$$

とわかる。このとき、点 P は平面 DEF 上にあることから、実数 t, u を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DP} \\ &= \overrightarrow{OD} + t\overrightarrow{DE} + u\overrightarrow{DF} \\ &= \frac{2}{3}\vec{a} + t\left(-\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) + u\left(-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c}\right) \\ &= \frac{1}{3}(2-t-2u)\vec{a} + \frac{2}{3}t\vec{b} + \frac{1}{3}u\vec{c} \qquad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

と表せる。ここで、 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は一次独立であるから、①、②の係数を比較すると、

$$\begin{cases} 2-t-2u=0 \\ 1-s=\frac{2}{3}t \\ s=\frac{1}{3}u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=\frac{1}{9} \\ t=\frac{4}{3} \\ u=\frac{1}{3} \end{cases}$$

となる。したがって

$$\overrightarrow{OP} = \frac{8}{9}\vec{b} + \frac{1}{9}\vec{c}$$

とわかる。

$$\text{(答)} \quad \overrightarrow{OP} = \frac{8}{9}\vec{b} + \frac{1}{9}\vec{c}$$

(2)

点 Q は線分 EF 上にあるので、 $0 \leq k \leq 1$ となる実数 k を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DQ} &= k\overrightarrow{DE} + (1-k)\overrightarrow{DF} \\ &= \frac{1}{3}(-2+k)\vec{a} + \frac{2}{3}k\vec{b} + \frac{1}{3}(1-k)\vec{c} \end{aligned}$$

と表すことができる。また、点 Q は線分 DP 上にあるので実数 l を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DQ} &= l\overrightarrow{DP} \\ &= -\frac{2}{3}l\vec{a} + \frac{8}{9}l\vec{b} + \frac{1}{9}l\vec{c} \end{aligned}$$

となる。(1)と同様に、 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は一次独立であるから、

$$\begin{cases} \frac{1}{3}(-2+k) = -\frac{2}{3}l \\ \frac{2}{3}k = \frac{8}{9}l \\ \frac{1}{3}(1-k) = \frac{1}{9}l \end{cases} \therefore k = \frac{4}{5}, l = \frac{3}{5}$$

とわかる。したがって

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{4}{15}\vec{a} + \frac{8}{15}\vec{b} + \frac{1}{15}\vec{c}$$

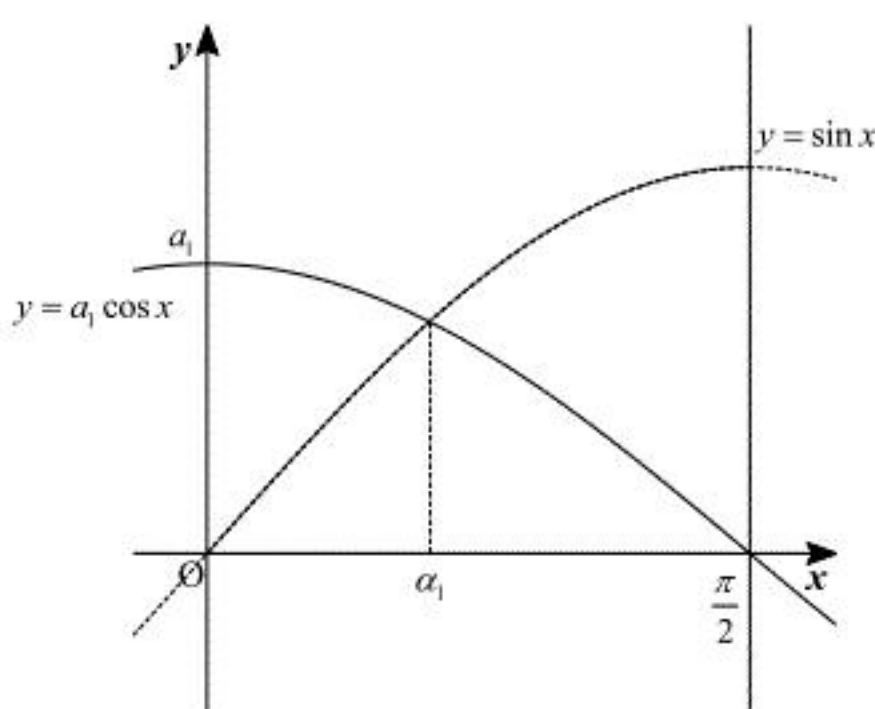
となる。

$$\text{(答)} \quad \overrightarrow{OQ} = \frac{4}{15}\vec{a} + \frac{8}{15}\vec{b} + \frac{1}{15}\vec{c}$$

II

(1)

$n=2$ のとき、図は以下になる。



$y = \sin x$ と $y = a_1 \cos x$ の交点の x 座標は

$$\sin x = a_1 \cos x$$

$$\therefore a_1 = \tan x$$

を満たす。ここで、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で $\tan x$ が単調に増加することから、交点は1つのみである。よって、その交点の x 座標を α_1 とおくと、

$$\tan \alpha_1 = a_1$$

$$\therefore \sin \alpha_1 = \frac{a_1}{\sqrt{1+a_1^2}}, \cos \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1+a_1^2}}$$

となる。一方、曲線 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$)、直線 $x = \frac{\pi}{2}$ および x 軸で囲まれる部分の面積を S とおくと、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \\ &= [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

である。この領域が曲線 $y = a_1 \cos x$ によって2等分されることから、

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \int_{\alpha_1}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - a_1 \cos x) dx \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &= [-\cos x - a_1 \sin x]_{\alpha_1}^{\frac{\pi}{2}} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &= -a_1 + \cos \alpha_1 + a_1 \sin \alpha_1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} + a_1 &= \sqrt{1+a_1^2} \end{aligned}$$

となる。両辺を2乗して整理すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} + a_1 + a_1^2 &= 1 + a_1^2 \\ \Leftrightarrow a_1 &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad a_1 = \frac{3}{4}$$

(2)

(1)と同様に、曲線 $y = a_k \cos x$ と曲線 $y = \sin x$ の交点の x 座標は

$$a_k = \tan x$$

を満たす。したがって、交点の x 座標を α_k とおくと

$$\sin \alpha_k = \frac{a_k}{\sqrt{1+a_k^2}}, \cos \alpha_k = \frac{1}{\sqrt{1+a_k^2}}$$

が成り立つから、曲線 $y = a_k \cos x$ と曲線 $y = \sin x$ 、直線 $x = \frac{\pi}{2}$ で囲まれる部分の面積を S_k とおくと、

$$\begin{aligned} S_k &= \int_{\alpha_k}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - a_k \cos x) dx \\ &= [-\cos x - a_k \sin x]_{\alpha_k}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -a_k + \cos \alpha_k + a_k \sin \alpha_k \\ &= -a_k + \sqrt{1+a_k^2} \end{aligned}$$

となる。ここで、題意より

$$S_k = (n-k) \cdot \frac{S}{n} = 1 - \frac{k}{n}$$

であるから、

$$\begin{aligned} 1 - \frac{k}{n} &= -a_k + \sqrt{1+a_k^2} \\ \Leftrightarrow \sqrt{1+a_k^2} &= 1 - \frac{k}{n} + a_k \end{aligned}$$

となり、さらに両辺を2乗して整理すると

$$a_k = \frac{k(2n-k)}{2n(n-k)}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_k = \frac{k(2n-k)}{2n(n-k)}$$

Ⅲ

2つの曲線の共有点の x 座標を t ($t > 0$) とする。この共有点が直線 $y = x$ 上にあることから、共有点の座標は (t, t) となる。したがって、これを2つの曲線の方程式に代入すると

$$\begin{cases} t = a^t & \cdots \textcircled{1} \\ \log_a t = t & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

を得る。一方、2つの曲線の方程式の導関数をそれぞれ求めると、

$$\begin{cases} y' = a^x \log a \\ y' = \frac{1}{x \log a} \end{cases}$$

であり、2つの曲線が点 (t, t) で交わる時、この点における接線の傾きは等しくなるから、

$$a^t \log a = \frac{1}{t \log a} \quad \cdots \textcircled{3}$$

が成り立つ。②を変形すると、

$$\begin{aligned} t &= \log_a t \\ &= \frac{\log t}{\log a} \\ \Leftrightarrow \log a &= \frac{1}{t} \log t \quad \cdots \textcircled{2}' \end{aligned}$$

となるから、①、②'を③に代入して変形すると、

$$\begin{aligned} t \cdot \frac{1}{t} \log t &= \frac{1}{t \cdot \frac{1}{t} \log t} \\ \Leftrightarrow (\log t)^2 &= 1 \\ \therefore \log t &= \pm 1 \end{aligned}$$

となるが、 $0 < a < 1$ より $\log a < 0$ であり、さらに $t > 0$ であるから、 $\log t = 1 > 0$ とすると②'の両辺の符号が合わず不適である。したがって

$$\log t = -1 \Leftrightarrow t = \frac{1}{e}$$

であり、これを②'に代入すると

$$\begin{aligned} \log a &= e \log \left(\frac{1}{e} \right) = -e \\ \therefore a &= e^{-e} \end{aligned}$$

と求まる。以上より、接点の座標は $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e} \right)$ であり、接線の傾きは

$$a^t \log a = e^{-e \cdot \frac{1}{e}} \cdot \log e^{-e} = -1$$

であるから、求める接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -\left(x - \frac{1}{e} \right) + \frac{1}{e} \\ &= -x + \frac{2}{e} \end{aligned}$$

である。

(答) $a = e^{-e}, y = -x + \frac{2}{e}$

IV

(ア)

$z=0$ のとき、与えられた等式は定義できないため、 $z \neq 0$ である。したがって、与えられた等式の両辺に $|z|$ をかけてもよく、

$$|z-i|=|kz-1| \qquad \cdots \textcircled{1}$$

となる。両辺を 2 乗して整理すると、

$$\begin{aligned} |z-i|^2 &= |kz-1|^2 \\ \Leftrightarrow (z-i)(\bar{z}+i) &= (kz-1)(k\bar{z}-1) \\ \Leftrightarrow (k^2-1)z\bar{z} - (k+i)z - (k-i)\bar{z} &= 0 \end{aligned}$$

となる。

[1] $k \neq \pm 1$, すなわち $k^2-1 \neq 0$ のとき

さらに変形して整理すると、

$$\begin{aligned} \bar{z}z - \frac{k+i}{k^2-1}z - \frac{k-i}{k^2-1}\bar{z} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(z - \frac{k-i}{k^2-1}\right)\left(\bar{z} - \frac{\overline{k-i}}{k^2-1}\right) &= \frac{|k-i|^2}{(k^2-1)^2} \\ \Leftrightarrow \left|z - \frac{k-i}{k^2-1}\right|^2 &= \frac{k^2+1}{(k^2-1)^2} \\ \therefore \left|z - \frac{k-i}{k^2-1}\right| &= \frac{\sqrt{k^2+1}}{|k^2-1|} \end{aligned}$$

となり、これは中心が $z = \frac{k-i}{k^2-1}$ 、半径が $\frac{\sqrt{k^2+1}}{|k^2-1|}$ となる円を表すことから、

$$|z| \leq \left|\frac{k-i}{k^2-1}\right| + \frac{\sqrt{k^2+1}}{|k^2-1|} = 2 \cdot \frac{\sqrt{k^2+1}}{|k^2-1|}$$

となる。したがって、求める実数 k の範囲は

$$2 \cdot \frac{\sqrt{k^2+1}}{|k^2-1|} \leq 2 \Leftrightarrow |k^2-1| \geq \sqrt{k^2+1}$$

を満たす実数 k であり、不等式の両辺はともに正であるから、2 乗して整理すると

$$\begin{aligned} k^4 - 2k^2 + 1 &\geq k^2 + 1 \\ \Leftrightarrow k^4 - 3k^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow k^2(k+\sqrt{3})(k-\sqrt{3}) &\geq 0 \\ \therefore k &\leq -\sqrt{3}, k=0, \sqrt{3} \leq k \end{aligned}$$

となる。

[2] $k = \pm 1$, すなわち $k^2-1=0$ のとき

$z = x+yi$ において整理すると、

$$\begin{aligned} (\pm 1+i)(x+yi) + (\pm 1-i)(x-yi) &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= \pm x \end{aligned}$$

となるから、 $\textcircled{1}$ は原点を通り傾きが ± 1 である直線を表す。したがって、 $|z| \leq 2$ 、すなわ

ち $\sqrt{x^2+y^2} \leq 2$ を満たさない $z = x+yi$ が存在するため、不適である。

以上[1],[2]より、求める k の範囲は

$$k \leq -\sqrt{3}, k=0, \sqrt{3} \leq k$$

である。

(答) $k \leq -\sqrt{3}, k=0, \sqrt{3} \leq k$

(イ)

A の表す移動により点 $(1,1)$ が点 $(3,3)$ に移ることから、

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \cdots \textcircled{1}$$

を満たす。また、直線 $y=-x$ 上の点は同じ直線上の点に移ることから、実数 t を用いて点

$(1,-1)$ が点 $(t,-t)$ に移ると仮定すると、

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} \qquad \cdots \textcircled{2}$$

と表せる。ここで、 $\textcircled{2}$ の両辺に任意の定数 s をかけると

$$A\begin{pmatrix} s \\ -s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} st \\ -st \end{pmatrix}$$

となるから、 $\textcircled{2}$ が成り立つことは直線 $y=-x$ 上の任意の点と同じ直線上の点に移ることと同

値である。 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ より、

$$A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & t \\ 3 & -t \end{pmatrix} \qquad \cdots \textcircled{3}$$

となる。ここで、 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ の逆行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

であるから、 $\textcircled{3}$ の右からこれをかけると

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3+t & 3-t \\ 3-t & 3+t \end{pmatrix} \qquad \cdots \textcircled{4}$$

となる。したがって、ハミルトン・ケーリーの定理より

$$\begin{aligned} A^2 - \left(\frac{3+t}{2} + \frac{3+t}{2}\right)A + \left(\frac{3+t}{2} \cdot \frac{3+t}{2} - \frac{3-t}{2} \cdot \frac{3-t}{2}\right)E &= O \\ \Leftrightarrow A^2 - (3+t)A + 3tE &= O \qquad \cdots \textcircled{5} \end{aligned}$$

が成り立ち、与えられた条件 $A^2 - kA + 3E = O$ と各辺の差をとると、

$$\{k - (3+t)\}A + 3(t-1)E = O \qquad \cdots \textcircled{6}$$

となる。

[1] A が E の定数倍であるとき

u を実数として $A = uE$ とおくと、 $\textcircled{4}$ より

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3+t & 3-t \\ 3-t & 3+t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow (t, u) &= (3, 3) \end{aligned}$$

となるから、 $A = 3E$ である。このとき、 $\textcircled{6}$ より

$$\begin{aligned} (k-6) \cdot 3E + 3 \cdot 2E &= O \\ \Leftrightarrow (k-4)E &= O \\ \therefore k &= 4 \end{aligned}$$

であり、

$$A^2 - 4A + 3E = 9E - 4 \cdot 3E + 3E = O$$

であるから、与えられた条件を満たす。

[2] A が E の定数倍でないとき

$\textcircled{6}$ より

$$\begin{cases} k - (3+t) = 0 \\ 3(t-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (k, t) = (4, 1)$$

であり、このとき $\textcircled{4}$ より

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

である。

以上[1],[2]より、求める解は

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

である。

(答) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$