

$Q(x)$ を因数分解すると

$$\begin{aligned} Q(x) &= x^3 - 7x^2 + 14x - 8 \\ &= (x-1)(x-2)(x-4) \end{aligned}$$

となる。 $P(x)$ を $Q(x)$ で割った商を $R(x)$ とおくと、

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x)Q(x) + x + 8 \\ &= (x-1)(x-2)(x-4)R(x) + x + 8 \end{aligned}$$

と変形できるから、

$$P(1) = 9, P(2) = 10, P(4) = 12$$

となる。また、問題文より $P(16) = 3P(2)$ が成り立つため、

$$P(16) = 30$$

となる。ここで、 $P(x^2)$ を $Q(x)$ で割った余りは高々 2 次式であるから、実数 a, b, c を用いて

$ax^2 + bx + c$ とおける。したがって、このときの商を $S(x)$ とおくと、

$$\begin{aligned} P(x^2) &= S(x)Q(x) + ax^2 + bx + c \\ &= (x-1)(x-2)(x-4)S(x) + ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

となり、ここに $x=1, 2, 4$ を代入すると、

$$\begin{aligned} P(1) &= a + b + c \\ \Leftrightarrow a + b + c &= 9 \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(4) &= 4a + 2b + c \\ \Leftrightarrow 4a + 2b + c &= 12 \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(16) &= 16a + 4b + c \\ \Leftrightarrow 16a + 4b + c &= 30 \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{3} \end{aligned}$$

となる。 $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ を連立した方程式を解くと、

$$a = 2, b = -3, c = 10$$

となるから、求める余りは

$$2x^2 - 3x + 10$$

である。

II

(1)

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ と表す。四角形 OADB は平行四辺形であるから

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$$

と表すことができ、四角形 OAEC, OBFC についても同様であるから、

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{c}$$

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{b} + \vec{c}$$

と表せる。ここで、点 G は平面 ODE 上にあることから、実数 s, t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= s\overrightarrow{OD} + t\overrightarrow{OE} \\ &= s(\vec{a} + \vec{b}) + t(\vec{a} + \vec{c}) \\ &= (s+t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}\end{aligned}$$

と表せる。また、点 G は直線 AF 上にあることから、実数 u を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{OA} + u\overrightarrow{AF} \\ &= \overrightarrow{OA} + u(\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OA}) \\ &= (1-u)\vec{a} + u\vec{b} + u\vec{c}\end{aligned}$$

と表せる。ここで、3つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は、いずれも大きさが零でなく、同一平面上に存在しないことから、上で求めた2本の $\overrightarrow{OG}$ の式における係数を比較すると、

$$\begin{cases} s+t=1-u \\ s=u \\ t=u \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow s=t=u=\frac{1}{3}$$

を得る。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$$

(2)

問題文より

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = x$$

であり、ここから、

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle AOB = |\vec{b}||\vec{c}|\cos\angle BOC = |\vec{c}||\vec{a}|\cos\angle COA$$

$$\Leftrightarrow \angle AOB = \angle AOC = \angle BOC$$

が分かる。この角の大きさを θ ($0 < \theta < \pi$) とおくと、

$$x = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle AOB = \cos\theta$$

となる。ここで、4点 O, A, B, C が同一平面上に存在しないことから、 x のとりうる範囲は

$$\begin{aligned}0 &< \angle AOB + \angle AOC + \angle BOC = 3\theta < 2\pi \\ \Leftrightarrow 0 &< \theta < \frac{2\pi}{3} \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{2} &< \cos\theta < 1 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{2} &< x < 1 \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

に制限される。一方、点 O から平面 ABE に下した垂線の足を点 H とおく。点 H は平面 ABE 上に存在することから、実数 p, q を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= \overrightarrow{OA} + p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{AE} \\ &= \vec{a} + p(\vec{b} - \vec{a}) + q\vec{c} \\ &= (1-p)\vec{a} + p\vec{b} + q\vec{c}\end{aligned}$$

と表せる。このとき、線分 OH と平面 ABE が垂直であることから、

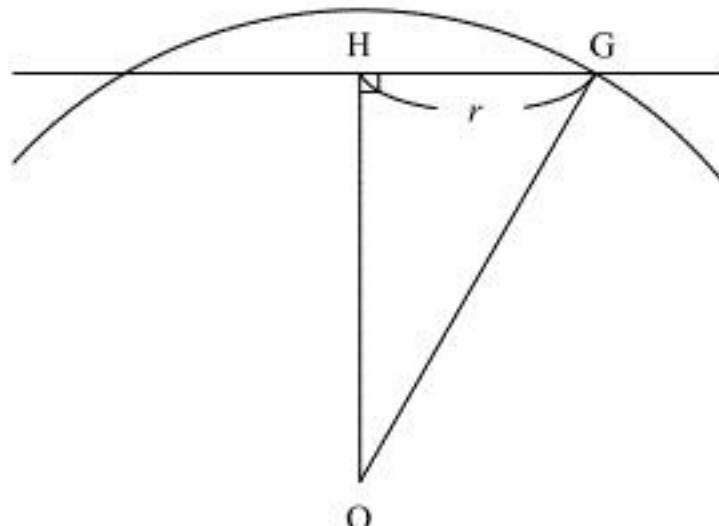
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \\ \Leftrightarrow \{(1-p)\vec{a} + p\vec{b} + q\vec{c}\} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (1-p)\vec{a} \cdot \vec{b} + p|\vec{b}|^2 + q\vec{b} \cdot \vec{c} - (1-p)|\vec{a}|^2 - p\vec{a} \cdot \vec{b} - q\vec{a} \cdot \vec{c} &= 0 \\ \Leftrightarrow (1-2p)(x-1) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AE} &= 0 \\ \Leftrightarrow \{(1-p)\vec{a} + p\vec{b} + q\vec{c}\} \cdot \vec{c} &= 0 \\ \Leftrightarrow (1-p)\vec{a} \cdot \vec{c} + p\vec{b} \cdot \vec{c} + q|\vec{c}|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow q &= -x\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、 $\textcircled{1}$ より $x \neq 1$ であることから、

$$\begin{aligned}p &= \frac{1}{2}, q = -x \\ \therefore \overrightarrow{OH} &= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - x\vec{c}\end{aligned}$$

と表せる。



点 O を中心とし、点 G を通る球の平面 OGH による断面図は上のようになる。求める円の半径は線分 HG であるから、線分 HG の最小値とそれを与える x を求めればよい。ここで、三平方の定理より

$$\begin{aligned}HG^2 &= |\overrightarrow{OG}|^2 - |\overrightarrow{OH}|^2 \\ &= \left| \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} \right|^2 - \left| \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - x\vec{c} \right|^2 \\ &= \left(\frac{10}{9}x + \frac{2}{3} \right) - \left(-x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) \\ &= x^2 + \frac{11}{18}x + \frac{1}{6} \\ &= \left(x + \frac{11}{36} \right)^2 + \frac{95}{1296}\end{aligned}$$

と変形できるから、 HG^2 は $x = -\frac{11}{36}$ のとき最小値 $\frac{95}{1296}$ をとる。 HG^2 が最小のとき、HG も最

小となるから、HG は $x = -\frac{11}{36}$ のとき最小値 $\frac{\sqrt{95}}{36}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad x = -\frac{11}{36} \text{ のとき最小値 } \frac{\sqrt{95}}{36}$$

III

$f(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 + 8ax^2 - 4x - 8a \\ &= 4(x+2a)(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

となるから、 $f(x)$ が極値をとる x の候補は $x = -2a, 1, -1$ である。このとき、 $-2a, 1, -1$ の大小関係による場合分けを考える。

[1] $-2a < -1$ ，すなわち $\frac{1}{2} < a$ のとき

$f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	$-2a$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

増減表より、 $x = -1$ で極大値 $f(-1) = \frac{16}{3}a - 1$ をとることから、

$$(X, Y) = \left(-1, \frac{16}{3}a - 1\right)$$

となる。ここで $\frac{1}{2} < a$ より、点 (X, Y) の軌跡は直線 $X = -1$ の $Y > \frac{5}{3}$ の部分となる。

[2] $-2a = -1$ ，すなわち $a = \frac{1}{2}$ のとき

$f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

増減表より、 $f(x)$ は極大値をとらない。

[3] $-1 < -2a < 1$ ，すなわち $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$ のとき

$f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-2a$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

増減表より、 $x = -2a$ で極大値 $f(-2a) = -\frac{16}{3}a^4 + 8a^2$ をとることから、

$$(X, Y) = \left(-2a, -\frac{16}{3}a^4 + 8a^2\right)$$

となり、ここから a を消去すると、軌跡の方程式は

$$Y = -\frac{1}{3}(-2a)^4 + 2(-2a)^2 = -\frac{1}{3}X^4 + 2X^2$$

と表せる。ここで、 $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$ より $-1 < X < 1$ であり、 $g(X) = -\frac{1}{3}X^4 + 2X^2$ とおくと、

$$g'(X) = -\frac{4}{3}X^3 + 4X = -\frac{4}{3}X(X + \sqrt{3})(X - \sqrt{3})$$

となるから、 $-1 < X < 1$ における $g(X)$ の増減表は以下のようになる。

X	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$g'(X)$		$-$	0	$+$	
$g(X)$		$\searrow$		$\nearrow$	

[4] $-2a = 1$ ，すなわち $a = -\frac{1}{2}$ のとき

$f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

増減表より、 $f(x)$ は極大値をとらない。

[5] $1 < -2a$ ，すなわち $a < -\frac{1}{2}$ のとき

$f(x)$ の増減表は以下のようになる。

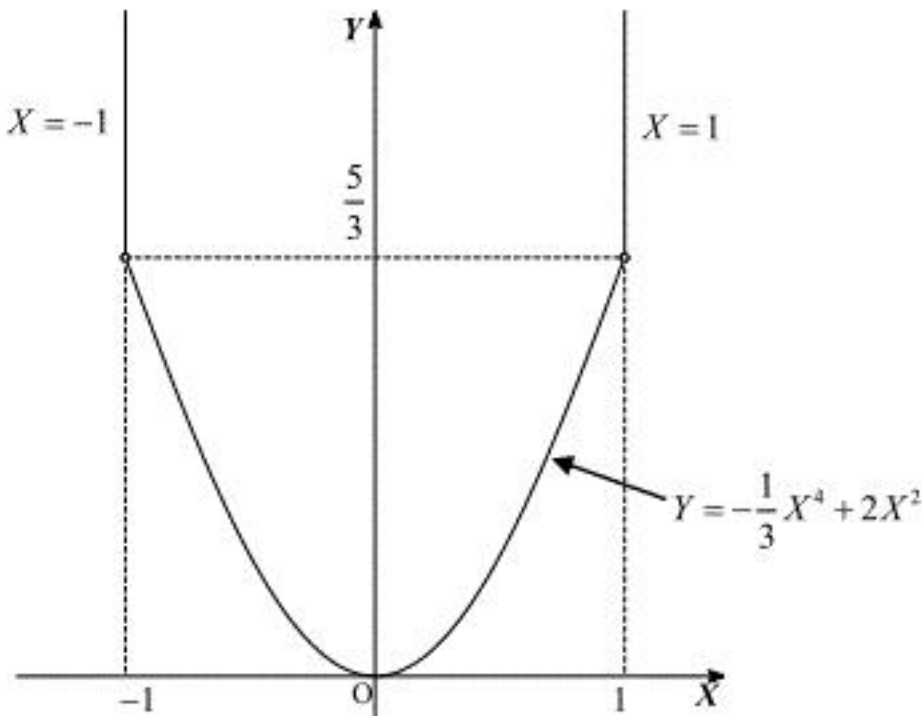
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	$-2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

増減表より、 $x = 1$ で極大値 $f(1) = -\frac{16}{3}a - 1$ をとることから、

$$(X, Y) = \left(1, -\frac{16}{3}a - 1\right)$$

となる。ここで $a < -\frac{1}{2}$ より、点 (X, Y) の軌跡は直線 $X = 1$ の $Y > \frac{5}{3}$ の部分となる。

以上[1]から[5]より、求める軌跡を図示すると下図のようになる。



IV

(1)

$n \geq 2$ において,

$$\begin{aligned} f_n(x) - f_{n-1}(x) &= \left(\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} - x^{n+1} \right) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{x^k}{k} - x^n \right) \\ &= \frac{x^n}{n} - x^{n+1} + x^n \\ &= \left(1 + \frac{1}{n} \right) x^n - x^{n+1} \end{aligned}$$

となる。ここで,

$$g_n(x) = \left(1 + \frac{1}{n} \right) x^n - x^{n+1}$$

とおき, $g_n(x)$ を x で微分すると,

$$\begin{aligned} g_n'(x) &= (n+1)x^{n-1} - (n+1)x^n \\ &= (n+1)x^{n-1}(1-x) \end{aligned}$$

となる。これより, $x \geq 0$ における $g_n(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	1	...
$g'(x)$	0	+	0	-
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{n}$	$\searrow$

増減表より, $g_n(x) \leq \frac{1}{n}$ であるから, 与えられた不等式が成り立つためには,

$$\frac{1}{n} \leq \log \frac{n}{n-1}$$

が成り立つことを示せばよい。ここで, $t \geq 2$ のとき,

$$h(t) = \log \frac{t}{t-1} - \frac{1}{t} = \log t - \log(t-1) - \frac{1}{t}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{1}{t} - \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t^2} \\ &= -\frac{1}{t^2(t-1)} \\ &< 0 \quad (\because t \geq 2) \end{aligned}$$

となるから, $h(t)$ は単調減少である。また,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\log \frac{1}{1 - \frac{1}{t}} - \frac{1}{t} \right) = 0$$

より, $h(t) \geq 0$ である。よって, $n \geq 2$ において

$$h(n) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq \log \frac{n}{n-1}$$

が成り立つから, 与えられた不等式は成り立つ。

(証明終)

(2)

$n=1$ のとき,

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x - x^2 \\ &= -\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \\ &\leq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

より, $x \geq 0$ において

$$f_1(x) \leq \frac{1}{4}$$

が成り立つ。 $n \geq 2$ のとき, (1)の結果より, $k=2, 3, \dots, n$ において

$$f_k(x) - f_{k-1}(x) \leq \log \frac{k}{k-1} = \log k - \log(k-1)$$

が成り立つことから, 各辺の和をとると,

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \{ f_k(x) - f_{k-1}(x) \} &\leq \sum_{k=2}^n \{ \log k - \log(k-1) \} \\ \Leftrightarrow f_n(x) - f_1(x) &\leq \log n \end{aligned}$$

となる。したがって,

$$f_n(x) \leq \log n + f_1(x) \leq \log n + \frac{1}{4}$$

$$\therefore f_n(x) \leq \log n + \frac{1}{4}$$

となる。以上より, 任意の自然数 n に対して与えられた不等式は成り立つ。

(証明終)