

I

(1)

$f(x) = x^3 + ax + b$ について、 α, β, γ は $f(x) = 0$ の解であるから、

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

が成立する。すなわち、

$$x^3 + ax + b = x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma$$

である。よって、 x^2 の係数を比較すると

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

である。

(証明終)

(2)

(1)の結果に $\beta = \frac{1}{2}\alpha^2 - 4$, $\gamma = \frac{1}{2}\beta^2 - 4$ を代入してまとめると

$$\alpha + \left(\frac{1}{2}\alpha^2 - 4\right) + \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\alpha^2 - 4\right)^2 - 4\right\} = 0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha^3 - 12\alpha + 8) = 0$$

となる。 α は無理数より、 $\alpha^3 - 12\alpha + 8 = 0$ が成り立つ。また、 α は $f(x) = 0$ の解であるから、 $\alpha^3 + a\alpha + b = 0$ が成り立つ。よって

$$\alpha^3 - 12\alpha + 8 = \alpha^3 + a\alpha + b \Leftrightarrow -12\alpha + 8 = a\alpha + b$$

が得られる。よって、 α は無理数、 a, b は整数であるので、 $a = -12, b = 8$ である。

(答) $a = -12, b = 8$

II

(1)

2直線の法線ベクトルはそれぞれ $(1, s)$, $(t, 1)$ であり, 2直線が直交しているときとはそれらの法線ベクトルが直交しているときである。よって, 内積をとって

$$1 \cdot t + s \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow t = -s$$

となる。

(答) $t = -s$

(2)

交点の座標を (x, y) とおく。

[1] $y = 0$ のとき

$x + sy - 2 = 0$ で $y = 0$ を代入すると, $x = 2$ である。また, 直線 $tx + y - 2 = 0$ の式は $-sx + y - 2 = 0$ とかける。これに $(x, y) = (2, 0)$ を代入すると, $s = -1$ である。したがって, $s = -1$ のとき, 交点は $(2, 0)$ となる。

[2] $y \neq 0$ のとき

$x + sy - 2 = 0$ より, $s = \frac{-x+2}{y}$ である。また, もう一つの直線の式は(1)の結果より

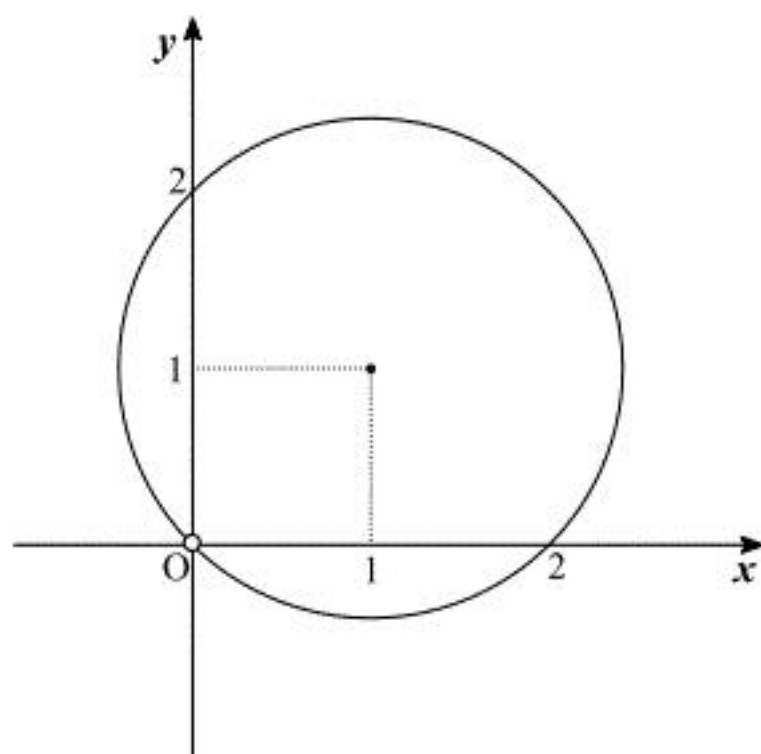
$-sx + y - 2 = 0$ とかける。 $s = \frac{-x+2}{y}$ を代入して変形すると

$$-\left(\frac{-x+2}{y}\right)x + y - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 2y = 0 \text{ かつ } y \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 \text{ かつ } y \neq 0$$

となる。

以上[1], [2]より, 2直線の交点の軌跡は下のようになる。これは, 中心 $(1, 1)$, 半径 $\sqrt{2}$ の円から原点を除いたものである。



(答) 前図

III

(1)

与えられた漸化式を(*)とする。(*)に $x=0$ を代入すると

$$f_{n+1}(0) = 2f_n(0) + \{f_n(0)\}^2$$

となる。 $n=1$ とすると、 $f_1(0)=0$ であるから、 $f_2(0)=0$ となるので、帰納的にすべての $n(n=1, 2, \dots)$ に対して $f_n(0)=0$ であることが分かる。また、(*)の両辺を x で微分すると

$$2f'_{n+1}(2x) = 2f'_n(x) + 2f'_n(x)f_n(x) \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。 $x=0$ を代入して、 $f_n(0)=0$ であることを利用すると

$$f'_{n+1}(0) = f'_n(0)$$

が得られる。 $f_1(x)=x$ より、 $f'_1(0)=1$ であるから $f'_2(0)=f'_1(0)=1$ である。したがって、帰納的にすべての $n(n=1, 2, \dots)$ に対して $f'_n(0)=1$ となる。また、①の両辺を x で微分すると

$$4f''_{n+1}(2x) = 2f''_n(x) + 2\{f'_n(x)\}^2 + 2f''_n(x)f_n(x)$$

となる。 $x=0$ を代入して、 $f_n(0)=0, f'_n(0)=1$ であることを利用すると

$$4f''_{n+1}(0) = 2f''_n(0) + 2$$

が得られる。また、 $f_1''(0)=0$ である。漸化式を解くと

$$\begin{aligned} 4f''_{n+1}(0) &= 2f''_n(0) + 2 \\ \Leftrightarrow f''_{n+1}(0) - 1 &= \frac{1}{2}(f''_n(0) - 1) \end{aligned}$$

が導かれる。よって、すべての $n(n=1, 2, \dots)$ に対して、

$$\begin{aligned} f''_n(0) - 1 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (f''_1(0) - 1) \\ \Leftrightarrow f''_n(0) &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f'_n(0) = 1, f''_n(0) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(2)

数学的帰納法を利用して、 $x \geq 0$ において不等式 $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) (n=1, 2, \dots)$ が成り立つことを示す。以下、この不等式を②とする。

[1] $n=1$ のとき

$x \geq 0$ のとき、 $f_1(x)=x \geq 0$ である。また、 $f_2(2x) = 2f_1(x) + \{f_1(x)\}^2 = 2x + x^2$ であるので、 $f_2(x) = \frac{x^2}{4} + x \geq 0$ である。このとき

$$f_2(x) - f_1(x) = \frac{x^2}{4} \geq 0$$

であるから、 $n=1$ のとき②は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき

②が成り立つと仮定する。 $n=k+1$ のとき、②の(右辺)-(左辺)を考えると

$$\begin{aligned} f_{k+2}(x) - f_{k+1}(x) &= \left[2f_{k+1}\left(\frac{x}{2}\right) + \left\{ f_{k+1}\left(\frac{x}{2}\right) \right\}^2 \right] - \left[2f_k\left(\frac{x}{2}\right) + \left\{ f_k\left(\frac{x}{2}\right) \right\}^2 \right] \\ &= 2 \left\{ f_{k+1}\left(\frac{x}{2}\right) - f_k\left(\frac{x}{2}\right) \right\} + \left\{ f_{k+1}\left(\frac{x}{2}\right) - f_k\left(\frac{x}{2}\right) \right\} \left\{ f_{k+1}\left(\frac{x}{2}\right) + f_k\left(\frac{x}{2}\right) \right\} \\ &= \left\{ f_{k+1}\left(\frac{x}{2}\right) - f_k\left(\frac{x}{2}\right) \right\} \left\{ f_{k+1}\left(\frac{x}{2}\right) + f_k\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \right\} \end{aligned}$$

となる。帰納法の仮定より、 $x \geq 0$ において $f_{k+1}(x) - f_k(x) \geq 0$ である。したがって、 $\frac{x}{2} \geq$

0 であるので、 $f_{k+1}\left(\frac{x}{2}\right) - f_k\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0$ が成立する。また、帰納法の仮定より、 $x \geq 0$ におい

て $0 \leq f_k\left(\frac{x}{2}\right) \leq f_{k+1}\left(\frac{x}{2}\right)$ であるから、 $f_{k+1}\left(\frac{x}{2}\right) + f_k\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \geq 0$ となる。ゆえに、

$$f_{k+2}(x) - f_{k+1}(x) = \left\{ f_{k+1}\left(\frac{x}{2}\right) - f_k\left(\frac{x}{2}\right) \right\} \left\{ f_{k+1}\left(\frac{x}{2}\right) + f_k\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \right\} \geq 0$$

が成り立つ。よって、 $n=k+1$ のときも成り立つ。

以上[1], [2]と数学的帰納法より、問題の不等式は成り立つ。

(証明終)

IV

(1)

$0 < t < 1$ より,

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \frac{1}{2t} \int_0^1 |x^n - t| dx + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2t} \left\{ \int_0^{\sqrt[n]{t}} (t - x^n) dx + \int_{\sqrt[n]{t}}^1 (x^n - t) dx \right\} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2t} \left\{ \left[tx - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^{\sqrt[n]{t}} + \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} - tx \right]_{\sqrt[n]{t}}^1 \right\} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2t} \left\{ \left(t\sqrt[n]{t} - \frac{t\sqrt[n]{t}}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - t \right) - \left(\frac{t\sqrt[n]{t}}{n+1} - t\sqrt[n]{t} \right) \right\} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{2t} + n\sqrt[n]{t} \right) \end{aligned}$$

である。ここで、 $g(t) = \frac{1}{2t} + n\sqrt[n]{t}$ とおくと,

$$\begin{aligned} g'(t) &= -\frac{1}{2t^2} + n \cdot \frac{1}{n} \cdot t^{\frac{1}{n}-1} \\ &= \frac{1}{2} t^{-2} \left(2t^{\frac{n+1}{n}} - 1 \right) \end{aligned}$$

となる。これより $0 < t < 1$ において $g'(t) = 0$ となるのは,

$$2t^{\frac{n+1}{n}} - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{n}{n+1}}$$

のときである。したがって、 $0 < t < 1$ における $g(t)$ の増減表は以下の表のようになる。

t	0	...	$\left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{n}{n+1}}$	...	1
$g'(t)$		-	0	+	
$g(t)$			$(n+1) \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{n+1}}$		

ゆえに、増減表より $t = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{n}{n+1}}$ のとき、 $g(t)$ は最小値 $(n+1) \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{n+1}}$ をとる。よって、 $f_n(t)$ は

$t = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{n}{n+1}}$ のとき、最小値 $\left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{n+1}}$ をとるので、 $a_n = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{n+1}}$ である。

(答) $a_n = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{n+1}}$

(2)

(1)の結果より、底が $\frac{1}{2}$ の対数をとると

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{2}} (a_n \cdot a_{n+1} \cdot \cdots \cdot a_{2n-1}) &= \log_{\frac{1}{2}} \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{n+1}} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{n+2}} \cdots \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2n}} \right\} \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \end{aligned}$$

となる。よって、区分求積法より

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \log_{\frac{1}{2}} (a_n \cdot a_{n+1} \cdot \cdots \cdot a_{2n-1}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \\ &= \left[\log(1+x) \right]_0^1 \\ &= \log 2 \end{aligned}$$

となる。 $\log$ の連続性より

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot a_{n+1} \cdot \cdots \cdot a_{2n-1} \right) = \log 2$$

である。よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot a_{n+1} \cdot \cdots \cdot a_{2n-1} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\log 2}$$

となる。

(答) $\left(\frac{1}{2} \right)^{\log 2}$