

I

(1)

$F(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ を変形していくと、

$$\begin{aligned} F(x) &= x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \\ &= x(x^3 - x^2 - x + 1) + 2x^3 + 2x^2 + 1 \\ &= x(x^3 - x^2 - x + 1) + 2(x^3 - x^2 - x + 1) + 4x^2 + 2x - 1 \\ &= (x+2)(x^3 - x^2 - x + 1) + 4x^2 + 2x - 1 \end{aligned}$$

となるため、 $R_1(x) = 4x^2 + 2x - 1$ である。また $G(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ を変形していくと、

$$\begin{aligned} G(x) &= x^3 - x^2 - x + 1 \\ &= \frac{1}{4}x(4x^2 + 2x - 1) - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + 1 \\ &= \frac{1}{4}x(4x^2 + 2x - 1) - \frac{3}{8}(4x^2 + 2x - 1) + \frac{5}{8} \\ &= \left(\frac{1}{4}x - \frac{3}{8}\right)(4x^2 + 2x - 1) + \frac{5}{8} \end{aligned}$$

となるため、 $R_2(x) = \frac{5}{8}$ となる。

$$(\text{答}) \quad R_1(x) = 4x^2 + 2x - 1, \quad R_2(x) = \frac{5}{8}$$

(2)

$\alpha = \cos \frac{2}{5}\pi + i \sin \frac{2}{5}\pi$ であるため、ド・モアブルの定理より、

$$\begin{aligned} \alpha^5 &= \left(\cos \frac{2}{5}\pi + i \sin \frac{2}{5}\pi \right)^5 \\ &= \cos \left(5 \cdot \frac{2}{5}\pi \right) + i \sin \left(5 \cdot \frac{2}{5}\pi \right) \\ &= \cos 2\pi + i \sin 2\pi \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる。よって $\alpha^5 - 1 = 0$ となり、これを変形すると、

$$\begin{aligned} \alpha^5 - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\alpha - 1)(\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\alpha - 1)F(\alpha) &= 0 \end{aligned}$$

となる。 $\alpha \neq 1$ であることから、 $F(\alpha) = 0$ である。また(1)の結果より、

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\alpha + 2)G(\alpha) + R_1(\alpha) &= 0 \\ \therefore R_1(\alpha) &= -(\alpha + 2)G(\alpha) \quad \cdots \text{①} \end{aligned}$$

となる。同様に(1)の結果より $G(\alpha) = \left(\frac{1}{4}\alpha - \frac{3}{8}\right)R_1(\alpha) + \frac{5}{8}$ であるため、これに①を代入すると、

$$\begin{aligned} G(\alpha) &= \left(\frac{1}{4}\alpha - \frac{3}{8}\right)R_1(\alpha) + \frac{5}{8} \\ \Leftrightarrow G(\alpha) &= -(\alpha + 2)\left(\frac{1}{4}\alpha - \frac{3}{8}\right)G(\alpha) + \frac{5}{8} \\ \Leftrightarrow G(\alpha) \left\{ 1 + (\alpha + 2)\left(\frac{1}{4}\alpha - \frac{3}{8}\right) \right\} &= \frac{5}{8} \\ \Leftrightarrow G(\alpha) \left(\frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{1}{8}\alpha + \frac{1}{4} \right) &= \frac{5}{8} \\ \Leftrightarrow G(\alpha) \left(\frac{2}{5}\alpha^2 + \frac{1}{5}\alpha + \frac{2}{5} \right) &= 1 \end{aligned}$$

となる。よって、これと $G(\alpha)(p\alpha^3 + q\alpha^2 + r\alpha + s) = 1$ の係数比較をすることで、

$$(p, q, r, s) = \left(0, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5} \right)$$

が得られる。

$$(\text{答}) \quad (p, q, r, s) = \left(0, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5} \right)$$

II

点 A, B の座標を $a < b$ となる実数 a, b を用いて、それぞれ $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$ とおく。 $y = x^2$ を

x で微分すると $y' = 2x$ であるから、点 A における $y = x^2$ の接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y - a^2 &= 2a(x - a) \\ \therefore y &= 2ax - a^2 \end{aligned}$$

となる。同様に点 B における接線の方程式は $y = 2bx - b^2$ となる。よって、交点である点 C の座標は、2 式を連立して解くと、

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = 2ax - a^2 \\ y = 2bx - b^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2ax - a^2 \\ 2ax - a^2 = 2bx - b^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2ax - a^2 \\ 2(a - b)x = a^2 - b^2 \end{cases} \\ \therefore (x, y) = \left(\frac{a+b}{2}, ab \right) (\because a \neq b) \end{aligned}$$

となる。よって、 $\triangle ABC$ のそれぞれの辺の長さの 2 乗は、

$$\begin{aligned} AB^2 &= (b-a)^2 + (b^2 - a^2)^2 \\ &= (b-a)^2 \{1 + (b+a)^2\} \\ AC^2 &= \left(\frac{a+b}{2} - a \right)^2 + (ab - a^2)^2 \\ &= (b-a)^2 \left(\frac{1}{4} + a^2 \right) \\ BC^2 &= \left(\frac{a+b}{2} - b \right)^2 + (ab - b^2)^2 \\ &= (b-a)^2 \left(\frac{1}{4} + b^2 \right) \end{aligned}$$

となる。ここで $\triangle ABC$ のどの角が直角になるかで場合分けをする。

[1] $\angle A$ が直角になる場合

この条件は $2AB^2 = 2AC^2 = BC^2$ と同値であるため、これを a, b の連立方程式として解くと、

$$\begin{aligned} \begin{cases} AB^2 = AC^2 \\ 2AC^2 = BC^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (b-a)^2 \left(\frac{1}{4} + a^2 \right) = (b-a)^2 \{1 + (b+a)^2\} \\ 2(b-a)^2 \left(\frac{1}{4} + a^2 \right) = (b-a)^2 \left(\frac{1}{4} + b^2 \right) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} + a^2 = 1 + b^2 + 2ab + a^2 \\ \frac{1}{2} + 2a^2 = \frac{1}{4} + b^2 \end{cases} (\because a \neq b) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 + 2ab + \frac{3}{4} = 0 \\ 2a^2 - b^2 + \frac{1}{4} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (b^2 + 2ab) - 3(2a^2 - b^2) = 0 \\ 2a^2 - b^2 + \frac{1}{4} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2b^2 + ab - 3a^2 = 0 \\ 2a^2 - b^2 + \frac{1}{4} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (2b+3a)(b-a) = 0 \\ 2a^2 - b^2 + \frac{1}{4} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = -3a (\because a \neq b) \\ 8a^2 - 4b^2 + 1 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = -3a \\ a^2 = 1 \end{cases} \\ \therefore (a, b) = \left(-1, \frac{3}{2} \right) (\because a < b) \end{aligned}$$

となる。また点 C の座標は、

$$\left(\frac{a+b}{2}, ab \right) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{3}{2} \right)$$

となる。

[2] $\angle B$ が直角の場合

放物線 $y = x^2$ は y 軸対称であるから、[1] の $\angle A$ が直角のときとの対称性から

$$(a, b) = \left(-\frac{3}{2}, 1 \right)$$

となる。また点 C の座標は

$$\left(\frac{a+b}{2}, ab \right) = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{2} \right)$$

となる。

[3] $\angle C$ が直角の場合

この条件は $AB^2 = 2AC^2 = 2BC^2$ と同値であるため、これを a, b の連立方程式として解くと、

$$\begin{aligned} \begin{cases} AB^2 = 2AC^2 \\ AC^2 = BC^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (b-a)^2 \{1 + (b+a)^2\} = 2(b-a)^2 \left(\frac{1}{4} + a^2 \right) \\ (b-a)^2 \left(\frac{1}{4} + a^2 \right) = (b-a)^2 \left(\frac{1}{4} + b^2 \right) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + b^2 + 2ab + a^2 = \frac{1}{2} + 2a^2 \\ \frac{1}{4} + a^2 = \frac{1}{4} + b^2 \end{cases} (\because a \neq b) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 + 2ab - a^2 + \frac{1}{2} = 0 \\ (a+b)(a-b) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 + 2ab - a^2 + \frac{1}{2} = 0 \\ a = -b (\because a \neq b) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = \frac{1}{4} \\ a = -b \end{cases} \\ \therefore (a, b) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) (\because a < b) \end{aligned}$$

となる。よって点 C の座標は、

$$\left(\frac{a+b}{2}, ab \right) = \left(0, -\frac{1}{4} \right)$$

となる。

以上、[1], [2], [3] より、点 C の座標は $\left(0, -\frac{1}{4} \right), \left(\pm \frac{1}{4}, -\frac{3}{2} \right)$ となる。

(答) $\left(0, -\frac{1}{4} \right), \left(\pm \frac{1}{4}, -\frac{3}{2} \right)$

Ⅲ

(1)

点 $P(x, x^2)$ と直線 $l: x - y + 2 = 0$ の距離は、点と直線の距離の関係式より、

$$\frac{|1 \cdot x - 1 \cdot x^2 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} |(x-2)(x+1)|$$

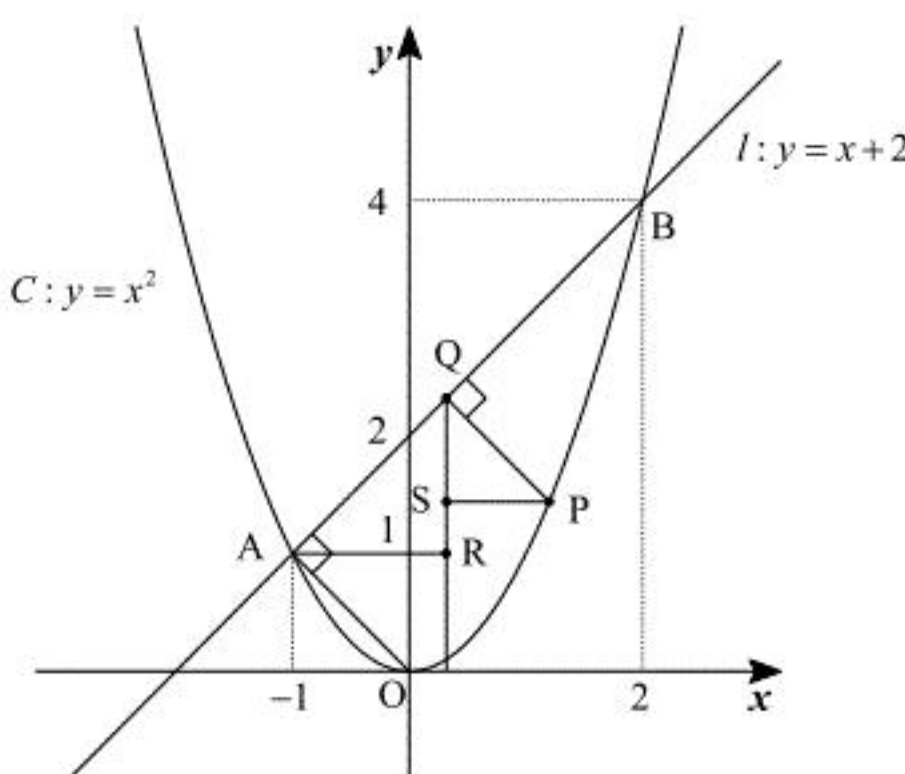
となる。 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} |(x-2)(x+1)|$ とすると、 $0 \leq x \leq 2$ の範囲では $x-2 \leq 0, x+1 \geq 0$ であるから、

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(x-2)(x+1) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(x^2 - x - 2) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9\sqrt{2}}{8} \end{aligned}$$

となる。よって、 $0 \leq x \leq 2$ における点 P と直線 l の距離は、 $x = \frac{1}{2}$ のとき最大値 $\frac{9\sqrt{2}}{8}$ をとる。

(答) $\frac{9\sqrt{2}}{8}$

(2)



点 A, B は曲線 $C: y = x^2$ と直線 $l: y = x + 2$ の交点であるから、各点の座標は、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} y = x^2 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} y = x^2 \\ (x-2)(x+1) = 0 \end{cases} \\ \therefore &(x, y) = (-1, 1) \text{ または } (2, 4) \end{aligned}$$

となる。 x 座標が小さい方が点 A であるため、点 $A(-1, 1)$ 、点 $B(2, 4)$ となる。また直線 OA の傾きは、

$$\frac{0-1}{0-(-1)} = -1$$

となるため、傾きが 1 である直線 l と直交する。よって $\angle BAO$ は直角である。ここで点

$P(x, x^2)$ から直線 l におろした垂線の足を点 Q として $AQ = k$ とおく。点 Q から x 軸に垂線をおろしたとき、この垂線へ点 A および点 P からおろした垂線の足をそれぞれ点 R, S とすると、 $\triangle QAR$ および $\triangle QPS$ は $\angle QRA = \angle QSP = 90^\circ$ の直角二等辺三角形となる。よって、(1)より $QA = k, QP = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x^2 - x - 2)$ とあらわせるから、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} QA = \sqrt{2}AR \\ QP = \sqrt{2}PS \end{cases} \\ \therefore &AR = \frac{1}{\sqrt{2}}k, PS = -\frac{1}{2}(x^2 - x - 2) \end{aligned}$$

となる。また点 A と点 P の x 座標の差は $x - (-1) = x + 1$ であるから、

$$\begin{aligned} x+1 &= AR + PS \\ \Leftrightarrow x+1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}k - \frac{1}{2}(x^2 - x - 2) \\ \therefore k &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^2 + x) \end{aligned}$$

となる。ここで x, k の対応表は、

x	0	$\rightarrow$	2
k	0	$\rightarrow$	$3\sqrt{2}$

となり、また $\frac{dk}{dx} = \sqrt{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)$ となる。よって、求める回転体の体積は、

$$\begin{aligned} \int_0^{3\sqrt{2}} \pi QP^2 dk &= \pi \int_0^2 \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}(x^2 - x - 2) \right\}^2 \frac{dk}{dx} \cdot dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^2 (x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4) \cdot \sqrt{2} \left(x + \frac{1}{2} \right) dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \int_0^2 \left(x^5 - \frac{3}{2}x^4 - 4x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 6x + 2 \right) dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \left[\frac{1}{6}x^6 - \frac{3}{10}x^5 - x^4 + \frac{5}{6}x^3 + 3x^2 + 2x \right]_0^2 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{32}{3} - \frac{48}{5} - 16 + \frac{20}{3} + 12 + 4 \right) \pi \\ &= \frac{58}{15} \sqrt{2} \pi \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{58}{15} \sqrt{2} \pi$

IV

(1)

I_1, I_2 をそれぞれ求めると,

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \theta}{\sin \theta} d\theta \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\cos \theta \right]_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(0 + \cos \frac{1}{n} \right) \\
 &= 1 \\
 I_2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 2\theta}{\sin \theta} d\theta \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ -\frac{4}{3} (\cos^3 \theta)' \right\} d\theta \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\frac{4}{3} \cos^3 \theta \right]_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{4}{3} \left(0 - \cos^3 \frac{1}{n} \right) \right\} \\
 &= \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad I_1 = 1, I_2 = \frac{4}{3}$$

(2)

$I_{k+1} - I_k$ を計算すると,

$$\begin{aligned}
 I_{k+1} - I_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 (k+1)\theta - \sin^2 k\theta}{\sin \theta} d\theta \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left\{ \frac{1 - \cos 2(k+1)\theta}{2} - \frac{1 - \cos 2k\theta}{2} \right\}}{\sin \theta} d\theta \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2k\theta - \cos 2(k+1)\theta}{2 \sin \theta} d\theta \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin (2k+1)\theta \sin \theta}{2 \sin \theta} d\theta \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \sin (2k+1)\theta d\theta \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2k+1} \cos (2k+1)\theta \right]_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{2k+1} \left(0 - \cos \frac{2k+1}{n} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{2k+1}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad I_{k+1} - I_k = \frac{1}{2k+1}$$

(3)

(2)の結果より, $k \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
 I_k &= I_{k-1} + \frac{1}{2(k-1)+1} \\
 &= I_{k-2} + \frac{1}{2k-3} + \frac{1}{2k-1} \\
 &= \dots \\
 &= I_1 + \frac{1}{2 \cdot 1 + 1} + \dots + \frac{1}{2k-1} \\
 &= 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2k-1} \\
 &= \frac{1}{2 \cdot 1 - 1} + \frac{1}{2 \cdot 2 - 1} + \dots + \frac{1}{2k-1} \\
 &= \sum_{m=1}^k \frac{1}{2m-1}
 \end{aligned}$$

となる。

(証明終)