

整数解を n とすると、

$$n^3 + an^2 + bn + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow n(n^2 + an + b) = -1$$

となる。 n, a, b は整数であるから、 $n, n^2 + an + b$ は整数である。よって、

$$(n, n^2 + an + b) = (1, -1), (-1, 1)$$

となる。

[1] $(n, n^2 + an + b) = (1, -1)$ のとき

$$n^2 + an + b = -1$$

$$\Leftrightarrow 1 + a + b = -1$$

$$\Leftrightarrow b = -a - 2$$

となる。よって、

$$x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + ax^2 + (-a-2)x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\{x^2 + (a+1)x - 1\} = 0$$

となる。ここで、 $x^2 + (a+1)x - 1 = 0$ の判別式を D とすると、

$$D = (a+1)^2 + 4 > 0$$

となる。そのため、 $x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0$ が虚数解をもたないから、条件を満たす a, b は存在しない。

[2] $(n, n^2 + an + b) = (-1, 1)$ のとき

$$n^2 + an + b = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 - a + b = 1$$

$$\Leftrightarrow b = a$$

・・・①

となる。よって、

$$x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + ax^2 + ax + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\{x^2 + (a-1)x + 1\} = 0$$

となる。 $x^2 + (a-1)x + 1 = 0$ の判別式を D とすると、 $x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0$ が虚数解を持つ条

件は、 $D = (a-1)^2 - 4$ より、

$$(a-1)^2 - 4 < 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1+2)(a-1-2) < 0$$

$$\Leftrightarrow (a+1)(a-3) < 0$$

$$\Leftrightarrow -1 < a < 3$$

となる。 a は整数であるから、 $a = 0, 1, 2$ である。①より、 $(a, b) = (0, 0), (1, 1), (2, 2)$ となる。

以上[1], [2]より、条件を満たす (a, b) の組は $(0, 0), (1, 1), (2, 2)$ となる。

(答) $(a, b) = (0, 0), (1, 1), (2, 2)$

II

(1)

3点 P, Q, R は双曲線 C 上にあるから、 p, q, r を相異なる 0 でない実数として、3点 P, Q, R の座標を $P\left(p, \frac{1}{p}\right), Q\left(q, \frac{1}{q}\right), R\left(r, \frac{1}{r}\right)$ とする。このとき、点 P を通り直線 QR に垂直な直線を直

線 l とする。直線 QR の傾きが $\frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{q}}{r - q} = -\frac{1}{qr}$ であるから、直線 l の傾きは qr である。よって、直

線 l の方程式は、

$$\begin{aligned} y - \frac{1}{p} &= qr(x - p) \\ \Leftrightarrow y &= qrx + \frac{1}{p} - pqr \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また、点 Q を通り直線 PR に垂直な直線を直線 m とする。直線 PR の傾きが

$\frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{p}}{r - p} = -\frac{1}{pr}$ であるから、直線 m の傾きは pr である。よって、直線 m の方程式は、

$$\begin{aligned} y - \frac{1}{q} &= pr(x - q) \\ \Leftrightarrow y &= prx + \frac{1}{q} - pqr \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。ここで、直線 l と直線 m の交点が垂心 H である。点 H の x 座標は①, ②より、

$$\begin{aligned} qrx + \frac{1}{p} - pqr &= prx + \frac{1}{q} - pqr \\ \Leftrightarrow r(q - p)x &= -\frac{q - p}{pq} \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{1}{pqr} \quad (\because r \neq 0, q - p \neq 0) \end{aligned}$$

となる。これを①に代入して、点 H の y 座標は、

$$\begin{aligned} y &= qr \cdot \left(-\frac{1}{pqr}\right) + \frac{1}{p} - pqr \\ &= -pqr \end{aligned}$$

となる。ここで、 $H\left(-\frac{1}{pqr}, -pqr\right)$ は双曲線 C 上にあるから、三角形 PQR の垂心 H は双曲線 C 上にある。

(証明終)

(2)

点 P は x 座標が -1 であり、双曲線 C 上にあるから、 $P(-1, -1)$ である。三角形 PQR は正三角形だから、垂心 H は重心と一致する。よって、 $Q\left(q, \frac{1}{q}\right), R\left(r, \frac{1}{r}\right)$ とすると、点 H の座標は

$$\left(\frac{-1 + q + r}{3}, \frac{-1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}}{3}\right)$$

となる。また(1)より、点 H の座標は $\left(-\frac{1}{pqr}, -pqr\right)$ であり、 $p = -1$ を代入して $\left(\frac{1}{qr}, qr\right)$ となる。よって、 q, r は 0 でない実数だから、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \frac{-1 + q + r}{3} = \frac{1}{qr} \\ \frac{-1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}}{3} = qr \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} q + r = \frac{3}{qr} + 1 \\ \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 3qr + 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} q + r = \frac{3}{qr} + 1 \\ \frac{q + r}{qr} = 3qr + 1 \end{cases} \\ \Rightarrow &\frac{\frac{3}{qr} + 1}{qr} = 3qr + 1 \\ \Leftrightarrow &3(qr)^3 + (qr)^2 - qr - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow &(qr - 1)\{3(qr)^2 + 4qr + 3\} = 0 \\ \therefore qr &= 1 \left(\because 3(qr)^2 + 4qr + 3 = 3\left(qr + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{3} > 0 \right) \end{aligned}$$

が必要である。また、

$$q + r = \frac{3}{qr} + 1 = 4$$

となるので、解と係数の関係より、 q, r は $x^2 - 4x + 1 = 0$ の解となる。よって、

$$(q, r) = (2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}), (2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$$

となる。このとき、

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{q}, \frac{1}{r}\right) &= \left(\frac{1}{2 + \sqrt{3}}, \frac{1}{2 - \sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{2 - \sqrt{3}}, \frac{1}{2 + \sqrt{3}}\right) \\ &= (2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}), (2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

となるので、 $Q(2 \pm \sqrt{3}, 2 \mp \sqrt{3}), R(2 \mp \sqrt{3}, 2 \pm \sqrt{3})$ (複号同順) となる。このとき

$$\begin{cases} PQ^2 = PR^2 = \{(2 + \sqrt{3}) - (-1)\}^2 + \{(2 - \sqrt{3}) - (-1)\}^2 = 24 \\ QR^2 = \{(2 + \sqrt{3}) - (2 - \sqrt{3})\}^2 + \{(2 - \sqrt{3}) - (2 + \sqrt{3})\}^2 = 24 \end{cases}$$

より、三角形 PQR は確かに正三角形となる。

(答) $Q(2 \pm \sqrt{3}, 2 \mp \sqrt{3}), R(2 \mp \sqrt{3}, 2 \pm \sqrt{3})$ (複号同順)

III

(1)

接線 l_1 を楕円 C と第1象限で接する直線、接線 l_2 を楕円 C と第4象限で接する直線としても一般性は失われない。楕円 C と l_1, l_2 それぞれの接点を点 A 、点 B とする。さらに、点 P の座標を $P(p, 0)$ とする。点 A の座標を $A(x_1, y_1)$ とおくと、点 A は楕円 C 上の点であるから、直線 l_1 の方程式は、

$$\frac{x_1}{a^2}x + \frac{y_1}{b^2}y = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。ここで、楕円 C は x 軸に関して対称であり、点 P は x 軸上にあるから、

$$\begin{aligned} \angle APO &= \frac{1}{2} \angle APB \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

となる。よって、直線 AP の傾きは -1 である。よって、 $\textcircled{1}$ より、

$$\frac{x_1}{a^2} = \frac{y_1}{b^2} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。また、点 A は楕円 C 上にあるから、

$$\begin{aligned} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} &= 1 \\ \Leftrightarrow x_1^2 + a^2 b^2 \frac{y_1^2}{b^4} &= a^2 \quad (\because a > 0) \\ \Leftrightarrow x_1^2 + a^2 b^2 \frac{x_1^2}{a^4} &= a^2 \\ \Leftrightarrow (a^2 + b^2) x_1^2 &= a^4 \quad (\because a > 0) \\ \Leftrightarrow x_1^2 &= \frac{a^4}{a^2 + b^2} \quad (\because a^2 + b^2 > 0) \\ \Leftrightarrow x_1 &= \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (\because x_1 > 0) \end{aligned}$$

となる。また、 $\textcircled{2}$ より、

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{a^2} &= \frac{y_1}{b^2} \\ \Leftrightarrow y_1 &= \frac{b^2}{a^2} x_1 \quad (\because b > 0) \\ \Leftrightarrow y_1 &= \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

となる。ここで、直線 l_1 と x 軸の交点は $(p, 0)$ であり、 $\textcircled{1}$ より、

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{a^2} \cdot p + \frac{y_1}{b^2} \cdot 0 &= 1 \\ \Leftrightarrow p &= \frac{a^2}{x_1} \quad (\because a > 0, x_1 > 0) \\ \therefore p &= \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

となる。

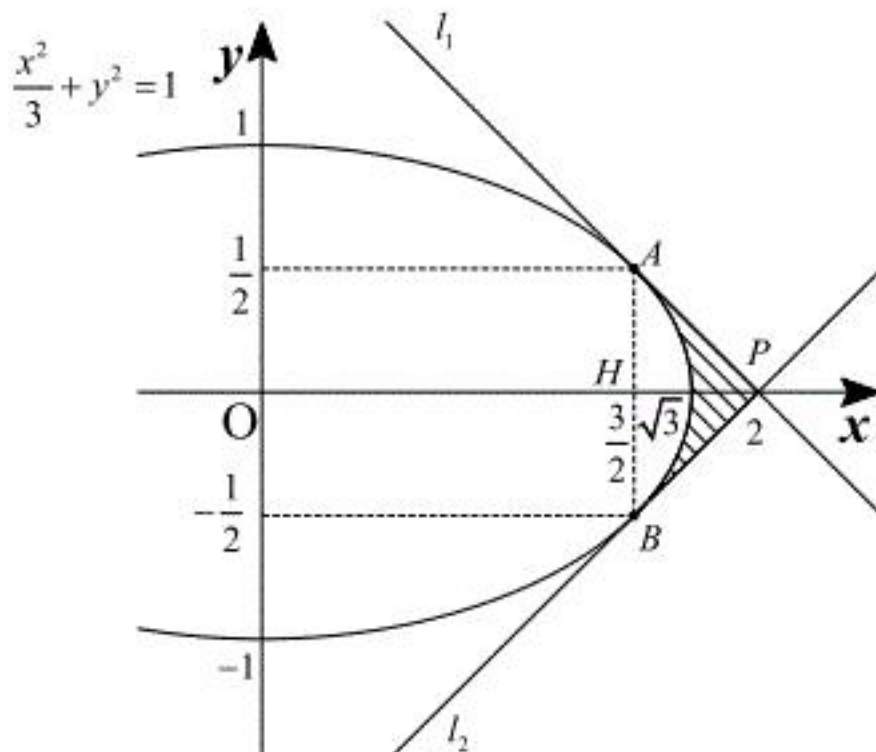
(答) $p = \sqrt{a^2 + b^2}$

(2)

$a = \sqrt{3}, b = 1$ であるから、 $p = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = 2, x_1 = \frac{(\sqrt{3})^2}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}} = \frac{3}{2}, y_1 = \frac{1^2}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}$ である。

よって、 $P(2, 0), A\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ となり、対称性から $B\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ となる。ここで、 $H\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ とする。

このとき、面積を求める領域は下図の斜線部分になる。



三角形 ABP の面積を S_1 とすると、

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot HP \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(2 - \frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2}{3} + y^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow y^2 &= 1 - \frac{x^2}{3} \\ \Leftrightarrow y &= \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{3}} \end{aligned}$$

であり、楕円 C の $x > 0$ の部分と、直線 AH で囲まれた図形の面積を S_2 とすると、対称性より、

$$S_2 = 2 \int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{3}} dx$$

となる。 $x = \sqrt{3} \sin \theta$ とおくと、

x	$\frac{3}{2}$	$\rightarrow$	$\sqrt{3}$
θ	$\frac{\pi}{3}$	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$

となるから、

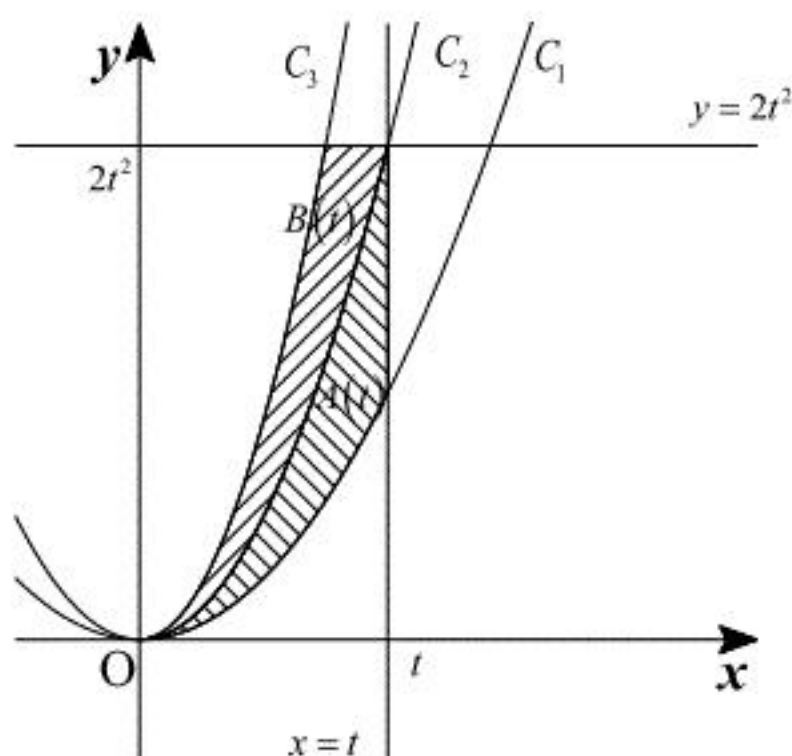
$$\begin{aligned} S_2 &= 2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \cdot \sqrt{3} \cos \theta d\theta \\ &= 2\sqrt{3} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \sqrt{3} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= \sqrt{3} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \sqrt{3} \left\{ \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\sin \pi - \sin \frac{2}{3} \pi \right) \right\} \\ &= \sqrt{3} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6} \pi - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

となる。よって、求める面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= S_1 - S_2 \\ &= \frac{1}{4} - \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \pi - \frac{3}{4} \right) \\ &= 1 - \frac{\sqrt{3}}{6} \pi \end{aligned}$$

となる。

(答) $1 - \frac{\sqrt{3}}{6} \pi$



$A(t)$ は曲線 C_1, C_2 および直線 $x=t$ で囲まれた図形の面積であるから、

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_0^t (2x^2 - x^2) dx \\ &= \int_0^t x^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^t \\ &= \frac{1}{3} t^3 \end{aligned}$$

となる。また、曲線 C_2 の $x > 0$ の部分と y 軸と $y = 2t^2$ で囲まれた図形の面積は

$$\begin{aligned} t \cdot 2t^2 - \int_0^t 2x^2 dx &= 2t^3 - \left[\frac{2}{3} x^3 \right]_0^t \\ &= 2t^3 - \frac{2}{3} t^3 \\ &= \frac{4}{3} t^3 \end{aligned}$$

となる。これと $B(t) = A(t) = \frac{1}{3} t^3$ より、曲線 C_3 と y 軸と $y = 2t^2$ で囲まれた図形の面積は

$$\frac{4}{3} t^3 - B(t) = t^3$$

となる。ここで、 $f(x)$ の逆関数を $g(x)$ とすると $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$ である。また、 $g(y)$ の原始関数を $G(y)$ とすると、曲線 C_3 と y 軸と $y = 2t^2$ で囲まれた図形の面積は $\int_0^{2t^2} g(y) dy$ となるから、

$$\begin{aligned} \int_0^{2t^2} g(y) dy &= t^3 \\ \Leftrightarrow G(2t^2) - G(0) &= t^3 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。 $t=0$ のとき①は成立するから、①を微分しても同値性は失われないことに注意すると、

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\Leftrightarrow 4t \cdot g(2t^2) = 3t^2 \\ &\Leftrightarrow g(2t^2) = \frac{3}{4} t \quad (\because t > 0) \end{aligned}$$

となる。これに $t = \frac{4}{3}x$ を代入して $g\left(\frac{32x^2}{9}\right) = x$ を得る。したがって、 $g(x)$ は $f(x)$ の逆関数だ

から、 $f(x) = \frac{32}{9}x^2$ となる。この $f(x)$ は確かに条件を満たす。

(答) $f(x) = \frac{32}{9}x^2 \quad (x \geq 0)$