

第 1 問

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
5	0	1	1	1	9	1	3	4	9
サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ		
ー	3	3	2	1	6	1	0		

〔解説〕

(1)

実数 α は $0 \leq \alpha < 2\pi$ で、 $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$ 、 $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$ を満たすものとする。このときド・モアブルの定理より、

$$\begin{aligned}(3+i)^{1000} &= \left(\sqrt{10}\right)^{1000} (\cos \alpha + i \sin \alpha)^{1000} \\ &= 10^{500} (\cos 1000\alpha + i \sin 1000\alpha)\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}a &= 10^{500} \cos 1000\alpha \\ b &= 10^{500} \sin 1000\alpha\end{aligned}$$

である。このとき

$$\begin{aligned}|a| + |b| &> \sqrt{a^2 + b^2} = 10^{500} \\ |a| + |b| &< 10^{500} + 10^{500} = 2 \cdot 10^{500}\end{aligned}$$

となるから

$$10^{500} < |a| + |b| < 2 \cdot 10^{500}$$

である。よって、 $|a| + |b|$ は 501 桁の整数である。ここで、 η は $\tan \eta = 3$ 、 $0.3975\pi < \eta < 0.3976\pi$ を満たす実数とする。このとき、

$$\alpha + \eta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \eta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

が成り立つ。ゆえに、

$$\begin{aligned}0.3975\pi &< \eta < 0.3976\pi \\ \Leftrightarrow 0.3975\pi &< \frac{\pi}{2} - \alpha < 0.3976\pi \\ \Leftrightarrow 51 \cdot 2\pi + \frac{2}{5}\pi &< 1000\alpha < 51 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

であるから、

$$0 < \cos 1000\alpha < \sin 1000\alpha \Leftrightarrow 0 < a < b$$

である。

(2)

ς は方程式

$$x^3 - 5x + 3 = 0$$

の解であるから

$$\begin{aligned}\varsigma^3 - 5\varsigma + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\varsigma + 3)(\varsigma^2 - 3\varsigma + 4) - 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\varsigma + 3)\left(\frac{1}{9}\varsigma^2 - \frac{1}{3}\varsigma + \frac{4}{9}\right) &= 1\end{aligned}$$

である。ここで $x = -3$ のとき

$$(-3)^3 - 5 \cdot (-3) + 3 = -9 \neq 0$$

であるから

$$\varsigma \neq -3$$

である。よって

$$\frac{1}{\varsigma + 3} = \frac{1}{9}\varsigma^2 - \frac{1}{3}\varsigma + \frac{4}{9}$$

となる。また

$$\begin{aligned}A \cdot x &= x^4 - 5x^2 + 3x \\ &= (x^2 - 3x + 3)(x^2 + 3x + 1) - 3x - 3\end{aligned}$$

であるから、多項式 $A \cdot x$ を $x^2 - 3x + 3$ で割った余りは $-3x - 3$ である。このとき

$$x^2 - 3x + 3 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

であるから、

$$\begin{aligned}A \cdot x &= (x^2 - 3x + 3)(x^2 + 3x + 1) - 3x - 3 \\ \Leftrightarrow \frac{A \cdot x}{x^2 - 3x + 3} &= x^2 + 3x + 1 + \frac{-3x - 3}{x^2 - 3x + 3}\end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}A &= (x + 3)(x^2 - 3x + 3) + x - 6 \\ \Leftrightarrow \frac{A}{x^2 - 3x + 3} &= x + 3 + \frac{x - 6}{x^2 - 3x + 3} \\ \Leftrightarrow \frac{3A}{x^2 - 3x + 3} &= 3x + 9 + \frac{3x - 18}{x^2 - 3x + 3}\end{aligned}$$

となるから、以上得られた式を辺々足して、

$$\begin{aligned}\frac{A \cdot x}{x^2 - 3x + 3} + \frac{3A}{x^2 - 3x + 3} &= x^2 + 3x + 1 + \frac{-3x - 3}{x^2 - 3x + 3} + 3x + 9 + \frac{3x - 18}{x^2 - 3x + 3} \\ \Leftrightarrow \frac{A \cdot (x + 3)}{x^2 - 3x + 3} &= x^2 + 6x + 10 + \frac{-21}{x^2 - 3x + 3}\end{aligned}$$

となる。これに $x = \varsigma$ を代入すると、 $A = 0$ となり、

$$\begin{aligned}0 &= \varsigma^2 + 6\varsigma + 10 + \frac{-21}{\varsigma^2 - 3\varsigma + 3} \\ \Leftrightarrow \frac{21}{\varsigma^2 - 3\varsigma + 3} &= \varsigma^2 + 6\varsigma + 10\end{aligned}$$

となる。

第 2 問

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
9	7	3	3	6	3	0	3	1	1
サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト
3	2	4	0	3	1	2	6	1	9
ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ			
2	5	4	6	8	8	7			

〔解説〕

(1)

90 から 96 までの自然数について

$$\begin{aligned} 90 &= 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \\ 91 &= 7 \cdot 13 \\ 92 &= 2^3 \cdot 23 \\ 93 &= 3 \cdot 31 \\ 94 &= 2 \cdot 47 \\ 95 &= 5 \cdot 19 \\ 96 &= 2^5 \cdot 3 \end{aligned}$$

のように素因数分解できるから、これらの自然数は素数ではない。しかし、97 は 1 と 97 以外に約数を持たないから素数である。よって、素数 89 の次に大きな素数は 97 である。

(2)

a_3 について

$$\begin{aligned} a_1 &= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 = 1008 \\ a_2 &= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 504 \end{aligned}$$

であるから、 a_2 の次に大きい a_3 の値は

$$a_3 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7 = 336$$

となる。ここで

$$S(0) = \sum_{k=1}^n 1 = n$$

であり、整数 1008 の正の約数の総数 n は

$$n = (4+1) \cdot (2+1) \cdot (1+1) = 30$$

であるので、 $S(0) = 30$ である。また

$$\begin{aligned} S(1) &= \sum_{k=1}^n a_k \\ &= (1+2+2^2+2^3+2^4) \cdot (1+3+3^2) \cdot (1+7) \\ &= 31 \cdot 13 \cdot 8 \\ &= 2^3 \cdot 13 \cdot 31 \end{aligned}$$

であるから、整数値 $S(1)$ の素因数は大きい方から順に

$$31, 13, 2$$

である。また

$$\begin{aligned} S(-1) &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{7}\right) \\ &= \frac{403}{126} \end{aligned}$$

である。また

$$\begin{aligned} S(2) &= \sum_{k=1}^n a_k^2 \\ &= (1+2^2+2^4+2^6+2^8) \cdot (1+3^2+3^4) \cdot (1+7^2) \\ &= 341 \cdot 91 \cdot 50 \end{aligned}$$

であるから

$$\frac{S(2)}{S(1)} = \frac{341 \cdot 91 \cdot 50}{31 \cdot 13 \cdot 8} = \frac{1925}{4}$$

となる。

(3)

分数 $\frac{1}{47}$ について、5 桁の自然数 A_n (ただし万の位は 0 でもよい) を用いて

$$\frac{1}{47} = \frac{A_1}{10^5} + \frac{A_2}{10^{10}} + \cdots + \frac{A_7}{10^{35}} + \cdots$$

とおき、記号で伏せられている箇所がある A_7 を求める。両辺 47 倍して

$$1 = 47 \left(\frac{A_1}{10^5} + \frac{A_2}{10^{10}} + \cdots + \frac{A_7}{10^{35}} + \cdots \right)$$

であり

$$\begin{aligned} 47A_6 &= 47 \cdot 87324 = 4104228 \\ 47A_8 &= 47 \cdot 31914 = 1499958 \end{aligned}$$

であるから $47A_7$ の各桁を位の高いほうから a, b, c, d, e, f, g とおくと

$$\begin{array}{r} \cdots \cdots \cdots \\ 4104228 \\ abcde \\ 1499958 \\ + \cdots \cdots \cdots \\ \hline 99999999999999999999 \end{array}$$

となり

$$\begin{aligned} 47A_7 &= 199985 \\ \Leftrightarrow A_7 &= 4255 \end{aligned}$$

であることがわかる。よって

$$\frac{11}{47} = \frac{1}{47} \cdot 10 + \frac{1}{47}$$

であるから

$$\begin{aligned} d_{32} &= 4 + 2 = 6 \\ d_{45} &= 1 + 7 = 8 \end{aligned}$$

となる。また

$$d_{79} = d_{33}$$

であり

$$\begin{array}{r} 04255 \\ + 42553 \\ \hline 46808 \end{array}$$

となるから

$$d_{79} = 2 + 5 + 1 = 8$$

であり

$$\begin{aligned} d_{92} &= d_{46} \\ &= 7 + 0 \\ &= 7 \end{aligned}$$

である。

第 3 問

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
9	4	－	6	2	1	5	6

〔解説〕

$y=f(x)$ 上の点 $P(t, f(t))$ において、 $f'(t)=0$ となる正の実数 t があると仮定すると、このとき法線は x 軸と平行で、交わらない。よってすべての正の実数 t について $f'(t) \neq 0$ であり、法線の方程式は

$$y=-\frac{1}{f'(t)}(x-t)+f(t)$$

であり、これが $(6t^2+t-9\sqrt{t}, 0)$ を通るから代入して

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{f'(t)}(6t^2-9\sqrt{t})+f(t) \\ \Leftrightarrow 6t^2-9\sqrt{t} &= f(t)f'(t) \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。ここで $t=a$ を代入すると、 a は C と x 軸の交点の x 座標であることから、 $f(a)=0$ であるから

$$\begin{aligned} 6a^2-9\sqrt{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow 3\sqrt{a}\left(2a^{\frac{3}{2}}-3\right) &= 0 \end{aligned}$$

となり、 $a>0$ であるから

$$\begin{aligned} a^{\frac{3}{2}} &= \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow a^3 &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

である。また

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)^2-f(1)^2}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \{f(1+h)+f(1)\} \\ &= 2f'(1)f(1) \\ &= 2(6 \cdot 1^2-9\sqrt{1}) \\ &= -6 \end{aligned}$$

である。ここで、 $\textcircled{1}$ 式を不定積分して、 C' を積分定数として、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f(t)^2 &= 2t^3-6t^{\frac{3}{2}}+C' \\ \Leftrightarrow C' &= \frac{1}{2}f(t)^2-2t^3+6t^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

をえる。これに $t=a$ を代入すると

$$\begin{aligned} C' &= \frac{1}{2} \cdot 0-2a^3+6a^{\frac{3}{2}} \\ &= -2 \cdot \frac{9}{4}+6\sqrt{\frac{9}{4}} \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} f(t)^2 &= 4t^3-12t^{\frac{3}{2}}+9 \\ &= (2t\sqrt{t}-3)^2 \\ \Leftrightarrow f(t) &= \pm(2t\sqrt{t}-3) \end{aligned}$$

となるから

$$f'(t)=\pm 3\sqrt{t}$$

となるが、 $t=a$ における法線の傾きが正であるから $f'(a)<0$ である。よって

$$\begin{aligned} f'(t) &= -3\sqrt{t} \\ \therefore f(t) &= -2t\sqrt{t}+3 \end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned} f(1)^2+f(1) &= 1^2+1=2 \\ f(4)^2+f(4) &= (-13)^2-13=156 \end{aligned}$$

である。

第 4 問

任意の実数 a について、問題文の定義より

$$\begin{aligned}(h \circ \Phi)(a) &= h(\Phi(a)) \\ &= h((g \circ f)(a)) \\ &= h(g(f(a)))\end{aligned}$$

であり、かつ

$$\begin{aligned}(\Psi \circ f)(a) &= \Psi(f(a)) \\ &= (h \circ g)(f(a)) \\ &= h(g(f(a)))\end{aligned}$$

であるから

$$(h \circ \Phi)(a) = (\Psi \circ f)(a)$$

が常に成立する。

(証明終)