

受験番号					氏名	
------	--	--	--	--	----	--

2019 年度

数 学

I 注意事項

- 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- この問題冊子は 4 ページあります。試験開始後に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気づいた場合は、手を高く挙げて監督者に知らせなさい。
- 解答用紙は、数学解答用紙 **A** (マークシート) および 数学解答用紙 **B** があります。
 - 監督者の指示にしたがって、数学解答用紙 **A** の下記の該当欄にそれぞれ正しく記入し、マークしなさい。
 - ① 受験番号欄 受験番号を 4 ケタで記入し、さらにその下のマーク欄に該当する 4 ケタをマークしなさい。
 (例) 受験番号 0025 番 →

0	0	2	5
---	---	---	---

 と記入。
 - ② 氏名欄 氏名・フリガナを記入しなさい。
 - 監督者の指示にしたがって 数学解答用紙 **B** の受験番号・氏名欄に受験番号・氏名・フリガナを記入しなさい。
- 受験番号が正しくマークされていない場合または正しく記入されていない場合は、採点できないことがあります。
- 第 1 問 から 第 3 問 までの解答は 数学解答用紙 **A** にマークしなさい。第 4 問の解答は 数学解答用紙 **B** に記入しなさい。
- 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 試験終了後、問題冊子および解答用紙を机上に置き、試験監督者の指示に従い退場しなさい。

裏表紙に、数学解答用紙 **A** にマークする上での注意が続きます。この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし、問題冊子を開いてはいけません。

第 1 問

- (1) 複素数 $(3 + i)^{1000}$ の実部を a として虚部を b とする。ここで、 i は虚数単位である。このとき、 $|a| + |b|$ は アイウ 桁の整数であり、 a と b の大きさについての正しい関係は、つぎの ①～⑧ のうちの エ である。必要であれば、 $\tan \eta = 3$ かつ $0.3975\pi < \eta < 0.3976\pi$ となる実数 η が存在するという事実を利用せよ。

- | | | |
|----------------|-----------------|-----------------|
| ① $0 < b < a$ | ② $0 < a < b$ | ③ $0 < -a < b$ |
| ④ $0 < b < -a$ | ⑤ $0 < -b < -a$ | ⑥ $0 < -a < -b$ |
| ⑦ $0 < a < -b$ | ⑧ $0 < -b < a$ | ⑨ ①～⑧ 以外 |

- (2) 文字 x についての多項式 $A = x^3 - 5x + 3$ について考える。文字 x についての方程式 $A = 0$ のすべての解 ζ について、等式

$$\frac{1}{\zeta + 3} = \frac{\text{オ}}{\text{カ}} \zeta^2 - \frac{\text{キ}}{\text{ク}} \zeta + \frac{\text{ケ}}{\text{コ}}$$

が成立する。

文字 x についての多項式 $A \cdot x$ を $x^2 - 3x + 3$ で割った余りは

$$\text{サシ} x - \text{ス}$$

である。ここで $A \cdot x$ は多項式 A と文字 x の積の多項式である。

また、文字 x についての方程式 $A = 0$ のすべての解 ζ について、等式

$$\frac{\text{セソ}}{\zeta^2 - 3\zeta + 3} = \zeta^2 + \text{タ} \zeta + \text{チツ}$$

が成立する。

第2問

(1) 素数について考える。素数 89 のつぎに大きな素数は アイ である。

(2) 整数 $1008 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$ のすべての正の約数 n 個を大きい方から順に並べて得られる数列を

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

とする。このとき、 $a_3 = \text{ウエオ}$ であり、関数 $S(x) = \sum_{k=1}^n a_k x^k$ について、つぎの (i) と (ii) が成立する。

(i) $S(0) = \text{カキ}$ であり、整数値 $S(1)$ のすべての素因数を大きい方から順に並べると クケ、コサ、シ である。

(ii) $S(-1) = \frac{\text{スセソ}}{\text{タチツ}}$ であり、 $\frac{S(2)}{S(1)} = \frac{\text{テトナニ}}{\text{ヌ}}$ である。

(3) 分数 $\frac{1}{47}$ を小数により表すと

$$0.\overset{\cdot}{0}2127\underset{5|}{6}5957\underset{10|}{4}4680\underset{15|}{8}5106\underset{20|}{3}8297\underset{25|}{8}7234\underset{30|}{0}\text{クケク}5\underset{35|}{3}1914\underset{40|}{8}9361\underset{45|}{7}$$

のように小数第 1 位の数字 0 から第 46 位の数字 7 までは繰り返す循環小数となる。ただし、小数第 32 位から 34 位の数字は記号 クケク により伏せてある。

分数 $\frac{11}{47}$ を小数により表したときの小数第 n 位の数字により表される整数を d_n とする。上記の $\frac{1}{47}$ を循環小数により表した結果を利用することで、簡単な計算により

$$d_{32} = \text{ネ}, \quad d_{45} = \text{ノ}, \quad d_{79} = \text{ハ}, \quad d_{92} = \text{ヒ}$$

であることがわかる。

第3問

正の実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ と座標平面上の曲線 $C: y = f(x)$ について考える。関数 $f(x)$ は微分可能であるとし、曲線 C 上の各点 $P(t, f(t))$ における法線と x 軸との交点の x 座標の値が

$$6t^2 + t - 9\sqrt{t}$$

であるとする。

このとき、曲線 C と x 軸との交点が一つだけ存在し、その交点の x 座標の値を a とすると

$$a^3 = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$$

である。また、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)^2 - f(1)^2}{h} = \boxed{\text{ウエ}}$$

である。

さらに、曲線 C 上の点 $(a, 0)$ における法線の傾きが正であるならば、

$$f(1)^2 + f(1) = \boxed{\text{オ}}$$

であり、

$$f(4)^2 + f(4) = \boxed{\text{カキク}}$$

であることが決定する。

第4問

実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ と $g(x)$ と $h(x)$ に対して、関数 $\Phi(x)$ と $\Psi(x)$ を

$$\Phi(x) = (g \circ f)(x) \quad \text{と} \quad \Psi(x) = (h \circ g)(x)$$

により定める。このとき、どんな実数 a についても等式

$$(h \circ \Phi)(a) = (\Psi \circ f)(a)$$

が成立することを合成関数の定義にしたがって証明せよ。

ただし、合成関数 $(h \circ \Phi)(x)$ と $(\Psi \circ f)(x)$ が定義できることの証明は記さなくてよい。

第4問の解答は、数学解答用紙 **B** の解答枠内に記入せよ。数や式や言葉は、文字が判読できるよう丁寧に記入せよ。

II 数学解答用紙 A にマークする上での注意

1. 問題の文中の ア，イウ などの には，とくに指示のないかぎり，整数値が入ります。これらを次の方法で 数学解答用紙 A の指定欄に解答しなさい。

(1) ア，イ，ウ，… の一つ一つは，それぞれ，符号 (－) または数字 (0 ～ 9) のいずれか一つに対応します。それらを ア，イ，ウ，… で示された解答欄にマークして答えなさい。

(例) アイ に -8 と答えたいとき

ア	☒	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
イ	－	0	1	2	3	4	5	6	7	☒	9

(2) 分数形で解答する場合，それ以上約分できない形で答えなさい。分数の符号は分子につけ，分母につけてはいけません。

(例) $\frac{\text{ウエ}}{\text{オ}}$ に $-\frac{4}{5}$ と答えたいとき

ウ	☒	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
エ	－	0	1	2	3	☒	5	6	7	8	9
オ	－	0	1	2	3	4	☒	6	7	8	9

2. 解答を修正する場合は必ず「消しゴム」であとが残らないように完全に消しなさい。鉛筆の色や消しくずが残ったり， のような消し方などをした場合は，修正したことになりません。
3. 解答をそれぞれの問題に指定された数よりも多くマークした場合は無回答とみなされます。