第 I 問

〔解答〕

(1)	ア	イ			
	8	2			
(2)	ウ	エ			
	3	9			
(3)	オ	カ			
	6	4			
(4)	キ	ク	ケ	コ	サ
	2	7	0	0	0

〔解説〕

(1)

与式の両辺を 3 乗すると,

$$301\sqrt{a}-319\sqrt{b}=a\sqrt{a}-3a\sqrt{b}+3b\sqrt{a}-b\sqrt{b}$$
$$\Leftrightarrow (301-a-3b)\sqrt{a}=(319-3a-b)\sqrt{b}$$
$$\Leftrightarrow (301-a-3b)\sqrt{ab}=(319-3a-b)b \qquad \cdot\cdot\cdot①$$

となる。ここで，条件より，a, b は正の整数であるので，$\sqrt{ab}$ が整数でないとき，$\sqrt{ab}$ は無理数である。したがって，①の右辺は整数であるから，

$$301-a-3b=0 \qquad \cdot\cdot\cdot②$$

となる。また，このとき，$b \neq 0$ より，

$$319-3a-b=0 \qquad \cdot\cdot\cdot③$$

となる。よって，②と③を連立して，

$$a=82,\ b=73$$

を得る。

(2)

$$\vec{a}=(\cos\alpha,\ \sin\alpha),\ \vec{b}=\left(6\sqrt{\cos\beta},\ \sqrt{15\sin\beta}\right)$$

とする。また，$\vec{a}, \vec{b}$ のなす角を θ とすると

$$\left(6\cos\alpha\cdot\sqrt{\cos\beta}+\sin\alpha\cdot\sqrt{15\sin\beta}\right)^2=\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2$$
$$=\left(\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta\right)^2$$
$$=\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2\cos^2\theta$$

となる。ここで

$$\left|\vec{a}\right|^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$$

$$\left|\vec{b}\right|^2=36\cos\beta+15\sin\beta$$
$$=39\left(\frac{12}{13}\cos\beta+\frac{5}{13}\sin\beta\right)$$
$$=39\sin(\beta+\phi)$$
$$\leqq 39 \qquad \cdot\cdot\cdot①$$
$$\cos^2\theta \leqq 1 \qquad \cdot\cdot\cdot②$$

となる。ただし，ϕ は $\cos\phi=\frac{5}{13},\ \sin\phi=\frac{12}{13}$ を満たす値であり，①の等号は，

$\cos\beta=\frac{5}{13},\ \sin\beta=\frac{12}{13}$ のとき，すなわち $\vec{b}=\left(12\sqrt{\frac{3}{13}},\ 5\sqrt{\frac{3}{13}}\right)$ のときに成立する。また，このとき $\vec{a}=\pm\frac{1}{\sqrt{39}}\vec{b}=\left(\pm\frac{12}{13},\ \pm\frac{5}{13}\right)$（複合同順）とすれば，$\vec{a}, \vec{b}$ が互いに平行，つまり $\cos^2\theta=1$ となり，②の等号が成立する。以上より，求める最大値は，

$$1\cdot 39\cdot 1=39$$

となる。

(3)

$f(x)=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}$ とする。このとき，

$$f(m)=\int_m^{m+1}\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx$$

であり，$\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ は単調減少であるから，$f(x)$ も単調減少である。さらに，

$$f(m)>\int_m^{m+1}\frac{1}{3}(m+1)^{-\frac{2}{3}}dx=\frac{1}{3}(m+1)^{-\frac{2}{3}}$$
$$f(m)<\int_m^{m+1}\frac{1}{3}m^{-\frac{2}{3}}dx=\frac{1}{3}m^{-\frac{2}{3}}$$

であるから，

$$f(63)>\frac{1}{3}\cdot 64^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{48}$$
$$f(64)<\frac{1}{3}\cdot 64^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{48}$$

であり，求める値は，

$$m=64$$

である。

(4)

$g(x)=\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^4-\left(\sqrt[3]{x}\right)^4$ とすると，

$$g(n)=\int_n^{n+1}\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}dx$$

であり，$\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$ は単調増加であるから，$g(x)$ も単調増加である。さらに，

$$g(n)<\int_n^{n+1}\frac{4}{3}(n+1)^{\frac{1}{3}}dx=\frac{4}{3}(n+1)^{\frac{1}{3}}$$
$$g(n)>\int_n^{n+1}\frac{4}{3}n^{\frac{1}{3}}dx=\frac{4}{3}n^{\frac{1}{3}}$$

であるから，

$$g(26999)<\frac{4}{3}\cdot 27000^{\frac{1}{3}}=40$$
$$g(27000)>\frac{4}{3}\cdot 27000^{\frac{1}{3}}=40$$

であり，求める値は，

$$n=27000$$

である。

第２問

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ
	4	1	3
(2)	エ	オ	カ
	2	0	5
(3)	キ	ク	ケ
	2	5	4

〔解説〕

(1)

与式の両辺を x で微分すると，

$$4x^3+2y\frac{dy}{dx}=0$$
$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{2x^3}{y}\quad (\because y>0)$$

となる。よって $(x,y)=(2,3)$ のとき，

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{16}{3}$$

である。ゆえに，この点における曲線の接線は，

$$\begin{aligned} y&=-\frac{16}{3}(x-2)+3 \\ &=-\frac{16}{3}x+\frac{41}{3} \end{aligned}$$

となる。よって，

$$b=\frac{41}{3}$$

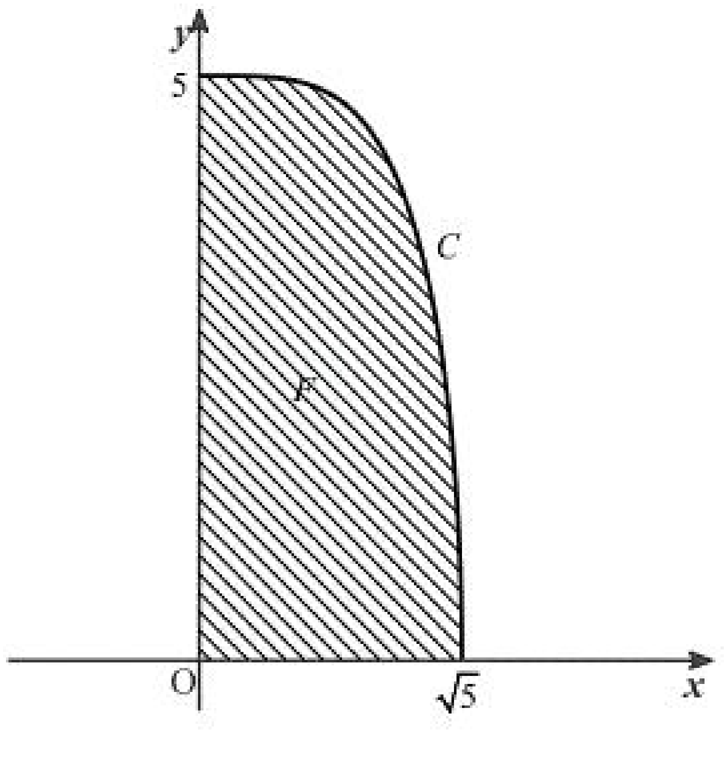
である。

(2)

C について $x>0,\ y>0$ より，

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x^3}{y}<0$$

であるから，y は x について単調減少である。したがって，C, F の概形は以下のようになる。



上図より，図形 F を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を V とすると，

$$\begin{aligned} V&=\int_0^{\sqrt{5}}\pi y^2dx \\ &=\pi\int_0^{\sqrt{5}}\left(25-x^4\right)dx \\ &=\pi\left[25x-\frac{1}{5}x^5\right]_0^{\sqrt{5}} \\ &=20\sqrt{5}\pi \end{aligned}$$

となる。

(3)

(2)の図より，図形 F を y 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を W とすると，

$$\begin{aligned} W&=\int_0^5\pi x^2dx \\ &=\pi\int_0^5\sqrt{25-y^2}\,dy \end{aligned}$$

である。ここで，$\int_0^5\sqrt{25-y^2}\,dy$ は半径5の四分円の面積を表すから，

$$\begin{aligned} W&=\pi\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot5^2\right) \\ &=\frac{25}{4}\pi^2 \end{aligned}$$

である。

第３問

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス
1	0	3	8	3	1	3	−	1	9	4	8	6

〔解説〕

$f(x)$の原始関数を$G(x)$とすると，

$$F(x)=\left[G(t)\right]_0^x$$
$$=G(x)-G(0)$$
$$S(x)=\left[G(t+x)\right]_0^x$$
$$=G(2x)-G(x)$$

となる。ここで，$G'(x)=f(x)$であり，$G(0)$は定数であるから，

$$F'(x)=G'(x)$$
$$=f(x)$$
$$S'(x)=2G'(2x)-G'(x)$$
$$=2f(2x)-f(x)$$

となる。したがって，

$$F'\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{10}{3}$$
$$S'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2f(\pi)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{8}{3}$$

となる。ここで$y=S(x)$とすると，$x=g(y)$であり，

$$\frac{dy}{dx}=S'(x)$$
$$=2f(2x)-f(x)$$

$$g'(y)=\frac{dx}{dy}$$
$$=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$
$$=\frac{1}{2f(2x)-f(x)}$$

であるから，

$$g'(0)=\frac{1}{f(0)}$$
$$=\frac{1}{3}$$

となる。また，

$$g''(y)=\frac{d^2x}{dy^2}$$
$$=\frac{dx}{dy}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dy}\right)$$
$$=g'(y)\cdot\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{2f(2x)-f(x)}\right\}$$
$$=g'(y)\cdot\frac{-4f'(2x)+f'(x)}{\{2f(2x)-f(x)\}^2}$$

であるから，

$$\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x}=g''(0)$$
$$=g'(0)\cdot\frac{-3f'(0)}{f(0)^2}$$
$$=-\frac{f'(0)}{f(0)^3}$$

となる。ここで，

$$f'(x)=\frac{19}{18}\cos x\cdot\left(9+\frac{19}{9}\sin x\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\therefore f'(0)=\frac{19}{54}$$

であるから，

$$\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x}=-\frac{f'(0)}{f(0)^3}$$
$$=-\frac{19}{486}$$

である。

第４問

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ
	1	5	6	4	3	8
(2)	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
	2	1	3	2	1	2
(3)	ス	セ	ソ	タ	チ	
	3	6	4	1	4	

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}P(A\cap B)&=P(B)\cdot P_B(A)\\&=\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{8}\\&=\frac{15}{64}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_A(B)&=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\\&=\frac{\frac{15}{64}}{\frac{5}{8}}\\&=\frac{3}{8}\end{aligned}$$

となる。

(2)

$$\begin{aligned}P(B\cup C)&=P(B)+P(C)-P(B\cap C)\\&=P(B)+P(C)-P(B)\cdot P_B(C)\\&=\frac{3}{8}+\frac{5}{16}-\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{12}\\&=\frac{21}{32}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_{\overline{C}}(B)&=\frac{P(B\cap\overline{C})}{P(\overline{C})}\\&=\frac{P(B\cup C)-P(C)}{1-P(C)}\\&=\frac{\frac{21}{32}-\frac{5}{16}}{1-\frac{5}{16}}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。

(3)

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

である。また，与条件より

$$P(A\cup B\cup C)=1$$
$$P(A\cap B\cap C)=0$$

であり，(2)の過程より

$$P(B\cap C)=P(B)\cdot P_B(C)=\frac{1}{32}$$

であるから，

$$\begin{aligned}P(A\cap C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(A\cup B\cup C)\\&=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}+\frac{5}{16}-\frac{15}{64}-\frac{1}{32}-1\\&=\frac{3}{64}\end{aligned}$$

となる。また，

$$\begin{aligned}P_C(A\cup B)&=\frac{P((A\cup B)\cap C)}{P(C)}\\&=\frac{P((A\cap C)\cup(B\cap C))}{P(C)}\\&=\frac{P(A\cap C)+P(B\cap C)-P((A\cap C)\cap(B\cap C))}{P(C)}\\&=\frac{P(A\cap C)+P(B\cap C)-P(A\cap B\cap C)}{P(C)}\\&=\frac{\frac{3}{64}+\frac{1}{32}-0}{\frac{5}{16}}\\&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

となる。