

第 1 問

〔解答〕

(1)	ア	イ		
	1	4		
(2)	ウ	エ	オ	カ
	5	8	3	1
(3)	キ	ク	ケ	コ
	1	7	2	1
(4)	サ	シ		
	4	0		
(5)	ス	セ	ソ	
	2	1	6	

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{6+\sqrt{35}}}&=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{12+2\sqrt{35}}}\\&=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}\\&=\frac{2\sqrt{2}(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{2} \\&=\sqrt{14}-\sqrt{10}\end{aligned}$$

となる。よって、 m, n は自然数であるため、

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{6+\sqrt{35}}}&=\sqrt{m}-\sqrt{n} \\ \Leftrightarrow \sqrt{14}-\sqrt{10}&=\sqrt{m}-\sqrt{n} \\ \therefore (m, n)&=(14, 10)\end{aligned}$$

となる、すなわち、 $m=14$ である。

(2)

凸多面体 P のすべての面が四角形であり、1つの辺は2つの面で共有されているため、凸多面体 P の辺の数は、

$$\frac{29 \cdot 4}{2}=58$$

である。また、凸多面体 P の頂点の数を v とすると、オイラーの多面体定理より、

$$\begin{aligned}v-58+29&=2 \\ \therefore v&=31\end{aligned}$$

となるため、凸多面体 P の頂点の数は31である。

(3)

多項式 A を x^3-2x^2+3 で割ったときの商を B とすると、

$$A=(x^3-2x^2+3)B+4x^2+5x+33$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}x^3-2x^2+3&=(x^2-3x+3)(x+1) \\ 4x^2+5x+33&=4(x^2-3x+3)+17x+21\end{aligned}$$

であるため、

$$\begin{aligned}A&=(x^3-2x^2+3)B+4x^2+5x+33 \\ &=(x^2-3x+3)(x+1)B+4(x^2-3x+3)+17x+21 \\ &=(x^2-3x+3)\{(x+1)B+4\}+17x+21\end{aligned}$$

となる。よって、求める余りは $17x+21$ である。

(4)

問題の条件より、整数 x, y を用いて、

$$\begin{cases}n=9x+4 \\ n=11y+7\end{cases}$$

と表せる。このとき、

$$\begin{aligned}9x+4&=11y+7 \\ \Leftrightarrow 9x-11y&=3\qquad\qquad\qquad \cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、 $(x, y)=(4, 3)$ は方程式 $9x-11y=3$ の特殊解である、すなわち、

$$9 \cdot 4-11 \cdot 3=3\qquad\qquad\qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。よって、 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ より、

$$\begin{aligned}9x-11y&=9 \cdot 4-11 \cdot 3 \\ \Leftrightarrow 9(x-4)&=11(y-3)\end{aligned}$$

となる。また、9, 11は互いに素であるため、整数 k を用いて、

$$\begin{aligned}\begin{cases}x-4=11k \\ y-3=9k\end{cases} \\ \therefore (x, y)&=(11k+4, 9k+3)\end{aligned}$$

と表せる。よって、

$$\begin{aligned}n&=9x+4 \\ &=9(11k+4)+4 \\ &=99k+40\end{aligned}$$

となるため、 n を99で割った余りは40である。

(5)

$$\begin{aligned}\sqrt{6} \cdot f(\sqrt{6})&=\sqrt{6} \cdot \left(-\left|\sqrt{6}\right|^{\sqrt{6}}\right) \\ &=-\left(\sqrt{6}\right)^{\sqrt{6}+1} \\ &<0\end{aligned}$$

であり、 $x<0$ において、

$$\begin{aligned}f(x)&=-(-x)^{\sqrt{6}} \\ f'(x)&=-\sqrt{6} \cdot (-1) \cdot (-x)^{\sqrt{6}-1} \\ &=\sqrt{6} \cdot (-x)^{\sqrt{6}-1}\end{aligned}$$

である。よって、求める値は、

$$\begin{aligned}f'(\sqrt{6} \cdot f(\sqrt{6}))&=f'\left(-\left(\sqrt{6}\right)^{\sqrt{6}+1}\right) \\ &=\sqrt{6} \cdot \left[-\left\{-\left(\sqrt{6}\right)^{\sqrt{6}+1}\right\}\right]^{\sqrt{6}-1} \\ &=\sqrt{6} \cdot \left(\sqrt{6}\right)^{(\sqrt{6}+1)(\sqrt{6}-1)} \\ &=\sqrt{6} \cdot \left(\sqrt{6}\right)^5 \\ &=\left(\sqrt{6}\right)^6 \\ &=216\end{aligned}$$

となる。

第2問

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
1	8	7	2	7	5	4	6

〔解説〕

$$\begin{aligned}3\cos\frac{x+p}{9}-3\cos\frac{x}{9}&=3\cos\left(\frac{2x+p}{18}+\frac{p}{18}\right)-3\cos\left(\frac{2x+p}{18}-\frac{p}{18}\right)\\&=-6\sin\frac{2x+p}{18}\sin\frac{p}{18}\end{aligned}$$

であるため、

$$\begin{aligned}3\cos\frac{x+p}{9}&=3\cos\frac{x}{9}\\\Leftrightarrow\sin\frac{2x+p}{18}\sin\frac{p}{18}&=0\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、問題の条件より、すべての実数 x に対し、 $\sin\frac{2x+p}{18}\sin\frac{p}{18}=0$ が成り立

つ、すなわち、 $\sin\frac{p}{18}=0$ となるような実数 p ($p>0$) 全体の集合が集合 A である。よって、集

合 A の任意の要素 p に対しある自然数 m が存在し、

$$\begin{aligned}\frac{p}{18}&=m\pi\\\therefore p&=18m\pi\end{aligned}$$

と表せる、すなわち、 $A=\{18m\pi\mid m \text{ は自然数}\}$ である。したがって、集合 A の要素のうち最小

の要素は 18π である。また、同様に、

$$\begin{aligned}4\sin\frac{x+p}{12}-4\sin\frac{x}{12}&=4\sin\left(\frac{2x+p}{24}+\frac{p}{24}\right)-4\sin\left(\frac{2x+p}{24}-\frac{p}{24}\right)\\&=8\cos\frac{2x+p}{24}\sin\frac{p}{24}\end{aligned}$$

であるため、

$$\begin{aligned}4\sin\frac{x+p}{12}&=4\sin\frac{x}{12}\\\Leftrightarrow\cos\frac{2x+p}{24}\sin\frac{p}{24}&=0\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、問題の条件より、すべての実数 x に対し、 $\cos\frac{2x+p}{24}\sin\frac{p}{24}=0$ が成り立

つ、すなわち、 $\sin\frac{p}{24}=0$ となるような実数 p ($p>0$) 全体の集合が集合 B である。よって、集

合 B の任意の要素 p に対しある自然数 n が存在し、

$$\begin{aligned}\frac{p}{24}&=n\pi\\\therefore p&=24n\pi\end{aligned}$$

と表せる、すなわち、 $B=\{24n\pi\mid n \text{ は自然数}\}$ である。ここで、任意の $p\in A\cap B$ に対し、ある

自然数 m, n が存在し、

$$\begin{cases}p=18m\pi\\p=24n\pi\end{cases}$$

が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned}18m\pi&=24n\pi\\\Leftrightarrow 3m&=4n\end{aligned}$$

であり、3, 4は互いに素であるため、ある自然数 q を用いて、

$$(m, n)=(4q, 3q)$$

と表せる。したがって、

$$\begin{aligned}p&=18m\pi\\&=18\cdot 4q\cdot \pi\\&=72q\pi\end{aligned}$$

となる、すなわち、 $A\cap B=\{72q\pi\mid q \text{ は自然数}\}$ である。よって、 $p_0=72\pi$ となる。問題の説

明より、 $p\in A\cap B$ ならば $p\in C$ であるため、 $A\cap B\subset C$ となる。ここで、任意の実数 x に対し、

$\cos\frac{x}{9}\leq 1, \sin\frac{x}{12}\leq 1$ となるため、

$$\begin{aligned}f(x)&=3\cos\frac{x}{9}+4\sin\frac{x}{12}\\\&\leq 3\cdot 1+4\cdot 1\\&=7\end{aligned}$$

が成り立つ。上式の等号成立条件は $\cos\frac{x}{9}=\sin\frac{x}{12}=1$ であり、このとき、ある整数 s, t を用い

て、

$$\begin{aligned}&\begin{cases}\frac{x}{9}=2s\pi\\\frac{x}{12}=\frac{\pi}{2}+2t\pi\end{cases}\\\Leftrightarrow &\begin{cases}x=18s\pi\\x=6(4t+1)\pi\end{cases}\end{aligned}$$

と表される。よって、

$$\begin{aligned}18s\pi&=6(4t+1)\pi\\\Leftrightarrow 3s-4t&=1\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、 $(s, t)=(3, 2)$ は方程式 $3s-4t=1$ の特殊解である、すなわち、

$$3\cdot 3-4\cdot 2=1$$

が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned}(3s-4t)-(3\cdot 3-4\cdot 2)&=1-1\\\Leftrightarrow 3(s-3)&=4(t-2)\end{aligned}$$

となる。また、3, 4は互いに素であるため、整数 k を用いて、

$$\begin{aligned}&\begin{cases}s-3=4k\\t-2=3k\end{cases}\\\therefore (s, t)&=(4k+3, 3k+2)\end{aligned}$$

と表せる。よって、 $p_0=72\pi$ より、

$$\begin{aligned}x&=18s\pi\\&=18\cdot (4k+3)\cdot \pi\\&=72k\pi+54\pi\\&=54\pi+kp_0\end{aligned}$$

となる。したがって、関数 $f(x)$ は $x=54\pi+kp_0$ (k は整数)のとき、最大値 $M=7$ をとる。こ

こで、 k は整数であるため、 $x>0$ のとき、

$$\begin{aligned}54\pi+kp_0&>0\\\Leftrightarrow k>-\frac{54\pi}{p_0}&=-\frac{3}{4}\left(\because p_0=72\pi>0\right)\\\therefore k&\geq 0\end{aligned}$$

となる。よって、 $f(x)=M$ となる最小の正の実数 $x=c$ は、

$$\begin{aligned}c&=54\pi+0\cdot p_0\left(\because k=0\right)\\&=54\pi\end{aligned}$$

である。

第3問

【解答】

(1)	ア	イ
	1	6
(2)	ウ	エ
	1	2
(3)	オ	
	8	

【解説】

(1)

$\triangle OAB$ において、余弦定理より、

$$\begin{aligned}\cos \angle AOB &= \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2 \cdot OA \cdot OB} \\ &= \frac{7^2 + 8^2 - 9^2}{2 \cdot 7 \cdot 8} \\ &= \frac{2}{7}\end{aligned}$$

となるため、求める値は、

$$\begin{aligned}\overline{OA} \cdot \overline{OB} &= OA \cdot OB \cdot \cos \angle AOB \\ &= 7 \cdot 8 \cdot \frac{2}{7} \\ &= 16\end{aligned}$$

である。

(2)

$\overline{OP} = t\overline{OA} + \frac{1}{t}\overline{OB}$ であり、(1)より、 $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 16$ であるため、

$$\begin{aligned}OP &= \sqrt{|\overline{OP}|^2} \\ &= \sqrt{\left| t\overline{OA} + \frac{1}{t}\overline{OB} \right|^2} \\ &= \sqrt{t^2 |\overline{OA}|^2 + \frac{1}{t^2} |\overline{OB}|^2 + 2\overline{OA} \cdot \overline{OB}} \\ &= \sqrt{t^2 \cdot 7^2 + \frac{1}{t^2} \cdot 8^2 + 2 \cdot 16} \\ &= \sqrt{49t^2 + \frac{64}{t^2} + 32}\end{aligned}$$

となる。ここで、 $t > 0$ より、 $49t^2 > 0$ 、 $\frac{64}{t^2} > 0$ であるため、相加・相乗平均の関係より、

$$\begin{aligned}49t^2 + \frac{64}{t^2} &\geq 2\sqrt{49t^2 \cdot \frac{64}{t^2}} = 112 \\ \therefore OP &\geq \sqrt{112 + 32} = 12\end{aligned}$$

となる。等号成立条件は、

$$\begin{aligned}\begin{cases} 49t^2 = \frac{64}{t^2} \\ t > 0 \end{cases} \\ \therefore t &= \frac{2\sqrt{14}}{7}\end{aligned}$$

である。よって、線分 OP の長さは $t = \frac{2\sqrt{14}}{7}$ のとき、最小値12をとる。

(3)

$$\begin{aligned}\overline{OA} \cdot \overline{OP} &= \overline{OA} \cdot \left(t\overline{OA} + \frac{1}{t}\overline{OB} \right) \\ &= t|\overline{OA}|^2 + \frac{1}{t}\overline{OA} \cdot \overline{OB} \\ &= 49t + \frac{16}{t} \\ &> 0 \quad (\because t > 0)\end{aligned}$$

であるため、 $\cos \angle POA > 0$ となる。また、点 Q は点 P から直線 OA に下した垂線と直線 OA の交点であるため、

$$\begin{aligned}OQ &= OP \cos \angle POA \\ &= \frac{1}{OA} \overline{OA} \cdot \overline{OP} \\ &= 7t + \frac{16}{7t}\end{aligned}$$

となる。ここで、 $t > 0$ より、 $49t > 0$ 、 $\frac{16}{t} > 0$ であるため、相加・相乗平均の関係より、

$$OQ = 7t + \frac{16}{7t} \geq 2\sqrt{7t \cdot \frac{16}{7t}} = 8$$

となる。等号成立条件は、

$$\begin{aligned}\begin{cases} 49t = \frac{16}{t} \\ t > 0 \end{cases} \\ \therefore t &= \frac{4}{7}\end{aligned}$$

である。よって、線分 OQ の長さは $t = \frac{4}{7}$ のとき、最小値8をとる。

第4問

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
1	1	2	9	－	1	1
ク	ケ	コ	サ	シ	ス	
5	9	－	3	4	1	

〔解説〕

x についての四次方程式 $x^4 + 11x^3 + 31x^2 + 11x + 1 = 0$ は $x = 0$ を解にもたないため、

$$x^4 + 11x^3 + 31x^2 + 11x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 11x + 31 + \frac{11}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \quad (\because x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 11\left(x + \frac{1}{x}\right) + 29 = 0$$

$$\therefore y^2 + 11y + 29 = 0 \quad \left(\because y = x + \frac{1}{x}\right)$$

となる。ここで、 $x = \alpha$ のとき $y = \alpha + \frac{1}{\alpha}$ であり、 $x = \frac{1}{\alpha}$ のときも $y = \alpha + \frac{1}{\alpha}$ である。よって、

x についての四次方程式(*)は $x = \alpha$ を解にもつとき、 $x = \frac{1}{\alpha}$ も解にもつ。また、 $x = \beta, \gamma, \delta$ の

ときも同様であるため、 $\gamma = \frac{1}{\alpha}, \delta = \frac{1}{\beta}$ としても一般性を失わない。さらに、 y についての二

次方程式 $y^2 + 11y + 29 = 0$ の2解を p, q とすると、解と係数の関係より、

$$\begin{cases} p + q = -11 \\ pq = 29 \end{cases}$$

が成り立つ。また、 $\{p, q\} = \left\{\alpha + \frac{1}{\alpha}, \beta + \frac{1}{\beta}\right\}$ であり、 $p = \alpha + \frac{1}{\alpha}, q = \beta + \frac{1}{\beta}$ としても一般性を

失わない。よって、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} &= \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \alpha + \beta \\ &= \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) \\ &= p + q \\ &= -11 \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 &= \alpha^2 + \beta^2 + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} \\ &= \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)^2 - 4 \\ &= p^2 + q^2 - 4 \\ &= (p + q)^2 - 2pq - 4 \\ &= (-11)^2 - 2 \cdot 29 - 4 \\ &= 59 \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 &= \alpha^3 + \beta^3 + \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} \\ &= \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^3 + \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)^3 - 3\left(\alpha + \frac{1}{\alpha} + \beta + \frac{1}{\beta}\right) \\ &= p^3 + q^3 - 3(p + q) \\ &= (p + q)^3 - 3pq(p + q) - 3(p + q) \\ &= (p + q)\{(p + q)^2 - 3pq - 3\} \\ &= -11 \cdot \{(-11)^2 - 3 \cdot 29 - 3\} \\ &= -341 \end{aligned}$$

である。