

第1問

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ					
	3	8	5	8					
(2)	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス
	2	1	2	－	1	2	1	1	2
(3)	セ	ソ							
	4	7							
(4)	タ	チ	ツ	テ					
	7	6	1	5					

【解説】

(1)

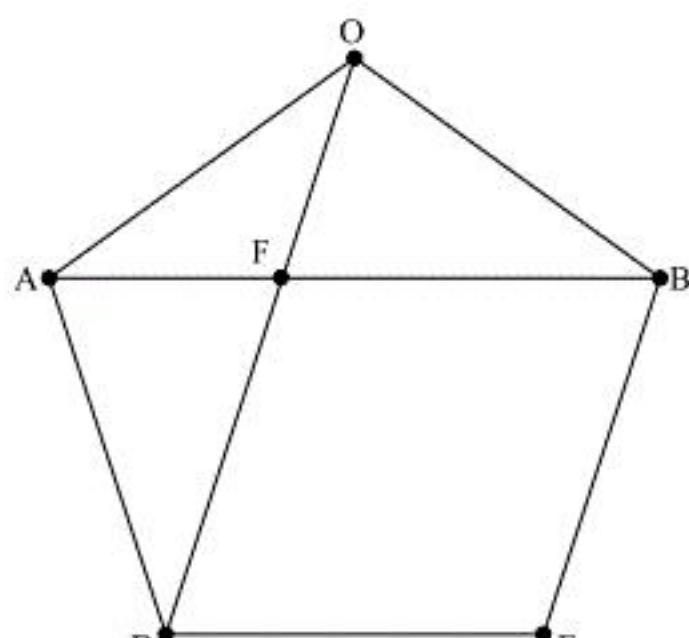
点Pにおける楕円 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{3}=1$ の接線の方程式は $\frac{a}{8}x+\frac{b}{3}y=1$ であるから、法線の方程式は

$$\begin{aligned}\frac{b}{3}(x-a)-\frac{a}{8}(y-b)&=0 \\ \Leftrightarrow bx-\frac{3}{8}ay-\frac{5}{8}ab&=0\end{aligned}$$

となる。

(2)

正十二面体は十二個の正五角形からなる図形であり、各頂点には三枚の正五角形が集まっている。



上図のように三点O, A, Bを含む正五角形をOADEBとして、線分ABと線分ODの交点を点Fとする。ここで、対称性よりFA=FOであり、 $\triangle FAO$ と $\triangle OAB$ は二等辺三角形である。さらに、 $\angle FAO=\angle OAB$ であり、これより $\triangle FAO$ と $\triangle OAB$ は相似である。加えて、正五角形の内角は 108° であり、

$$\begin{aligned}\angle OAB&=\frac{1}{2}(180^\circ-108^\circ) \\ &=36^\circ \\ \angle BOF&=108^\circ-\angle AOF \\ &=108^\circ-\angle OAB \quad (\because \angle AOF=\angle FAO=\angle OAB) \\ &=108^\circ-36^\circ \\ &=72^\circ \\ \angle BFO&=\angle AOF+\angle OAF \\ &=2\angle OAB \quad (\because \angle AOF=\angle FAO=\angle OAB) \\ &=72^\circ\end{aligned}$$

より、 $\angle BOF=\angle BFO$ で $\triangle BOF$ は二等辺三角形である。したがって、 $BF=BO=1$ であり、 $AF=AB-BF=r-1$ を得る。以上より、

$$\begin{aligned}AF:AO&=AO:AB \\ \Leftrightarrow r-1:1&=1:r \\ \Leftrightarrow r^2-r&=1 \\ \therefore (r-1)^2&=2-r\end{aligned}$$

である。次に、

$$\begin{aligned}|\overline{AB}|^2&=|\overline{OB}-\overline{OA}|^2 \\ \Leftrightarrow |\overline{AB}|^2&=|\overline{OA}|^2-2\overline{OA}\cdot\overline{OB}+|\overline{OB}|^2 \\ \Leftrightarrow r^2&=1^2-2\overline{OA}\cdot\overline{OB}+1^2 \\ \Leftrightarrow \overline{OA}\cdot\overline{OB}&=1-\frac{r^2}{2} \\ \therefore \overline{OA}\cdot\overline{OB}&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}r \quad (\because r^2=r+1)\end{aligned}$$

となる。また、Oから $\triangle ABC$ に下ろした垂線の足をIとすると、四面体OABCは正三角錐であることから、Iは $\triangle ABC$ の外心と一致する。よって、 $AI=BI$ であり、また $\angle AIB=120^\circ$ である。

ここで $AI=x$ とおき、 $\triangle ABI$ に余弦定理を用いると、

$$\begin{aligned}AB^2&=AI^2+BI^2-2\cdot AI\cdot BI\cdot\cos\angle AIB \\ \Leftrightarrow r^2&=x^2+x^2-2\cdot x\cdot x\cdot\cos 120^\circ \\ \Leftrightarrow x^2&=\frac{r^2}{3}\end{aligned}$$

となる。一方で、 $\triangle OAI$ に三平方の定理を用いると、 $r>1$ より、

$$\begin{aligned}OI&=\sqrt{OA^2-AI^2} \\ &=\sqrt{1^2-x^2} \\ &=\sqrt{1-\frac{r^2}{3}} \\ &=\sqrt{\frac{2-r}{3}} \quad (\because r^2=r+1) \\ &=\frac{r-1}{\sqrt{3}} \quad (\because (r-1)^2=2-r)\end{aligned}$$

を得る。ここで、線分OIは $\triangle ABC$ を底面としたときの四面体OABCの高さになる。よって

$$\begin{aligned}\frac{V}{r}&=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}r^2\sin 60^\circ\cdot\frac{r-1}{\sqrt{3}}}{r} \\ &=\frac{1}{12}r(r-1) \\ &=\frac{1}{12}(\because r^2-r=1)\end{aligned}$$

である。

(3)

$\tan|x|$ 、 $\cos^2 x$ はともに偶関数であるから、 $\frac{1}{\sqrt{9+7\tan|x|\cos^2 x}}$ は偶関数となる。よって求める

定積分は

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sqrt{9+7\tan|x|\cos^2 x}}=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sqrt{9+7\tan x\cos^2 x}}$$

となる。ここで $t=\tan x$ と置換すると $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}$ であり、対応表は次のようになる。

x	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{4}$
t	0	$\rightarrow$	1

したがって、求める定積分は

$$\begin{aligned}2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sqrt{9+7\tan x\cos^2 x}}&=2\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{9+7t}} \\ &=2\left[\frac{2}{7}\sqrt{9+7t}\right]_0^1 \\ &=\frac{4}{7}\end{aligned}$$

となる。

(4)

与式を変形すると

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{4+5\tan|x|}}{1-\sin x}dx&=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{(1+\sin x)\sqrt{4+5\tan|x|}}{\cos^2 x}dx \\ &=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{4+5\tan|x|}}{\cos^2 x}dx+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x\sqrt{4+5\tan|x|}}{\cos^2 x}dx\end{aligned}$$

となる。 $\tan|x|$ 、 $\cos^2 x$ はともに偶関数であり、 $\sin x$ は奇関数であるから、 $\frac{\sqrt{4+5\tan|x|}}{\cos^2 x}$ は偶関

数であり、 $\frac{\sin x\sqrt{4+5\tan|x|}}{\cos^2 x}$ は奇関数となる。よって求める定積分は

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{4+5\tan|x|}}{\cos^2 x}dx+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x\sqrt{4+5\tan|x|}}{\cos^2 x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{4+5\tan x}}{\cos^2 x}dx$$

となる。ここで $t=\tan x$ と置換すると $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}$ であり、対応表は次のようになる。

x	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{4}$
t	0	$\rightarrow$	1

したがって、求める定積分は

$$\begin{aligned}2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{4+5\tan x}}{\cos^2 x}dx&=2\int_0^1\sqrt{4+5t}dt \\ &=2\left[\frac{2}{15}(4+5t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\ &=\frac{4}{15}(3^3-2^3) \\ &=\frac{76}{15}\end{aligned}$$

となる。

第2問

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ		
	4	4	8		
(2)	エ	オ	カ		
	1	8	9		
(3)	キ	ク	ケ	コ	サ
	5	8	1	3	5

〔解説〕

(1)

点Pの時刻 t における速度ベクトル, 加速度ベクトルをそれぞれ $\vec{v}, \vec{a}$ とする。このとき

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) \\ &= (t^3, \sqrt{3}t^4) \\ \vec{a} &= \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2} \right) \\ &= (3t^2, 4\sqrt{3}t^3)\end{aligned}$$

となる。時刻 $t=4$ における点Pの速度ベクトルは $\vec{v}=(4^3, \sqrt{3} \cdot 4^4)$ であるから, 点Pの速さは

$$\begin{aligned}|\vec{v}| &= \sqrt{4^6 + 3 \cdot 4^8} \\ &= 4^3 \sqrt{1 + 3 \cdot 4^2} \\ &= 4^3 \cdot 7 \\ &= 448\end{aligned}$$

となる。

(2)

時刻 $t=3$ における点Pの加速度ベクトルは $\vec{a}=(3^3, 4 \cdot 3^3 \sqrt{3})$ であるから, 点Pの加速度の大き

さは

$$\begin{aligned}|\vec{a}| &= \sqrt{3^6 + 4^2 \cdot 3^7} \\ &= 3^3 \sqrt{1 + 4^2 \cdot 3} \\ &= 3^3 \cdot 7 \\ &= 189\end{aligned}$$

となる。

(3)

求める道のりを L とすると

$$\begin{aligned}L &= \int_0^1 |\vec{v}| dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{(t^3)^2 + (\sqrt{3}t^4)^2} dt \\ &= \int_0^1 t^3 \sqrt{3t^2 + 1} dt\end{aligned}$$

となる。ここで $u=3t^2+1$ と置換すると $\frac{du}{dt}=6t$ であり, 対応表は次のようになる。

t	0	→	1
u	1	→	4

したがって,

$$\begin{aligned}L &= \int_1^4 \frac{u-1}{3} \cdot \sqrt{u} \cdot \frac{1}{6} du \\ &= \frac{1}{18} \int_1^4 \left(u^{\frac{3}{2}} - \sqrt{u} \right) du \\ &= \frac{1}{18} \left[\frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 \\ &= \frac{1}{9} \left(\frac{31}{5} - \frac{7}{3} \right) \\ &= \frac{58}{135}\end{aligned}$$

となる。

第3問

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ
5	1	2	1	3	1	7	2	7	1	8

〔解説〕

くじの選び方はすべて同様に確からしい。また、試行(i)においてくじの選び方は ${}_6C_2$ 通り存在する。事象 A の確率は

$$\begin{aligned}P(A) &= \frac{{}_6C_2}{{}_9C_2} \\ &= \frac{5}{12}\end{aligned}$$

である。事象 B が起こったとき、(iii)を行う前のくじは当たりくじ2本とはずれくじ4本である。よって事象 B が起こったときの E の起こる条件つき確率は

$$\begin{aligned}P_B(E) &= \frac{2}{6} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

となる。また事象 C の確率は

$$\begin{aligned}P(C) &= \frac{{}_3C_2}{{}_9C_2} \\ &= \frac{1}{12}\end{aligned}$$

である。事象 C が起こったとき、(iii)を行う前のくじは当たりくじ1本とはずれくじ5本である。よって事象 $C \cap E$ の確率は

$$\begin{aligned}P(C \cap E) &= \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{72}\end{aligned}$$

である。事象 A が起こったとき、(iii)を行う前のくじは当たりくじ3本とはずれくじ3本である。また事象 B の確率は

$$\begin{aligned}P(B) &= \frac{{}_6C_1 \cdot {}_3C_1}{{}_9C_2} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。よって事象 E の確率は事象 A, B, C が排反であるため

$$\begin{aligned}P(E) &= P(A \cap E) + P(B \cap E) + P(C \cap E) \\ &= \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{7}{18}\end{aligned}$$

である。

第4問

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
1	8	6	2	2	3	2

〔解説〕

四次方程式の解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta = 8 & \dots \textcircled{1} \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = c & \dots \textcircled{2} \\ \alpha\beta\gamma + \beta\gamma\delta + \gamma\delta\alpha + \delta\alpha\beta = -4 & \dots \textcircled{3} \\ \alpha\beta\gamma\delta = -6 & \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

が成り立つ。 $\alpha\beta = \sqrt{2}$ を④に代入し変形すると、

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\gamma\delta &= -6 \\ \Leftrightarrow \gamma\delta &= -3\sqrt{2} \\ \therefore \gamma^2\delta^2 &= 18 \end{aligned}$$

となる。①より $\alpha + \beta = 8 - (\gamma + \delta)$ であるから、③を変形すると

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)\gamma\delta + (\gamma + \delta)\alpha\beta &= -4 \\ \Leftrightarrow \{8 - (\gamma + \delta)\}(-3\sqrt{2}) + (\gamma + \delta)\sqrt{2} &= -4 \quad (\because \gamma\delta = -3\sqrt{2}) \\ \Leftrightarrow 4\sqrt{2}(\gamma + \delta) &= 24\sqrt{2} - 4 \\ \therefore \gamma + \delta &= 6 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

となる。このとき②を変形すると

$$\begin{aligned} \sqrt{2} + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta - 3\sqrt{2} &= c \quad (\because \alpha\beta = \sqrt{2}, \gamma\delta = -3\sqrt{2}) \\ \Leftrightarrow \alpha(\gamma + \delta) + \beta(\gamma + \delta) - 2\sqrt{2} &= c \\ \Leftrightarrow (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) - 2\sqrt{2} &= c \\ \Leftrightarrow \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(6 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2\sqrt{2} &= c \quad (\because \alpha + \beta = 8 - (\gamma + \delta) = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}) \\ \therefore c &= \frac{23}{2} \end{aligned}$$

となる。