

2.

(1)

$$g(x) = x^2 - (a+d)x + (ad-bc)$$

$$g(A) = A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O \cdots \textcircled{1}$$

逆に $f(A) = O$ とする. $f(x)$ を $g(x)$ で割った商を $q(x)$, 余りを $\alpha x + \beta$ とし,

$$f(x) = g(x)q(x) + \alpha x + \beta$$

$$f(A) = g(A)q(A) + \alpha A + \beta E$$

$f(A) = O$ のとき, ①を用いて, $O = \alpha A + \beta E$ を得る.

$$\alpha \neq 0 \text{ なら } A = -\frac{\beta}{\alpha}E \text{ となって仮定に反する.}$$

よって, $\alpha = 0, E \neq O$ より $\beta = 0 \quad \therefore f(x) = g(x)q(x)$

$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れる. ■

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 2t-1 & t-2 \\ -2(t-1) & -t+3 \end{pmatrix} \quad (t \neq 0)$$

$$f(A) = A^5 - (s-1)A^3 + 4sA^2 - 8E = O \quad \cdots \textcircled{2}$$

行列 A の固有方程式は

$$\text{Tr}A = t+2$$

また

$$\det A = (2t-1)(-t+3) + (t-2) \cdot (2(t+1)) = t+1$$

となるから

$$g(x) = x^2 - (t+2)x + t+1 = (x-1)(x-t-1)$$

であり, A は E の定数倍でなく, ②より, (1) から

$f(x) = x^5 - (s-1)x^3 + 4sx^2 - 8$ は $g(x)$ で割り切れる.

$t \neq 0$ より $t+1 \neq 1$ であるから, $f(x)$ が $g(x)$ で割り切れるための条件は,

$$f(1) = 0, f(t+1) = 0$$

である.

$$f(1) = 0 \iff 1 - (s-1) + 4s - 8 = 0$$

$$\therefore s = 2 \quad \cdots \text{ (答)}$$

このとき

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5 - x^3 + 8x^2 - 8 = x^3(x^2-1) + 8(x^2-1) \\ &= (x^2-1)(x^3+8) = (x+1)(x-1)(x+2)(x^2-2x+4) \end{aligned}$$

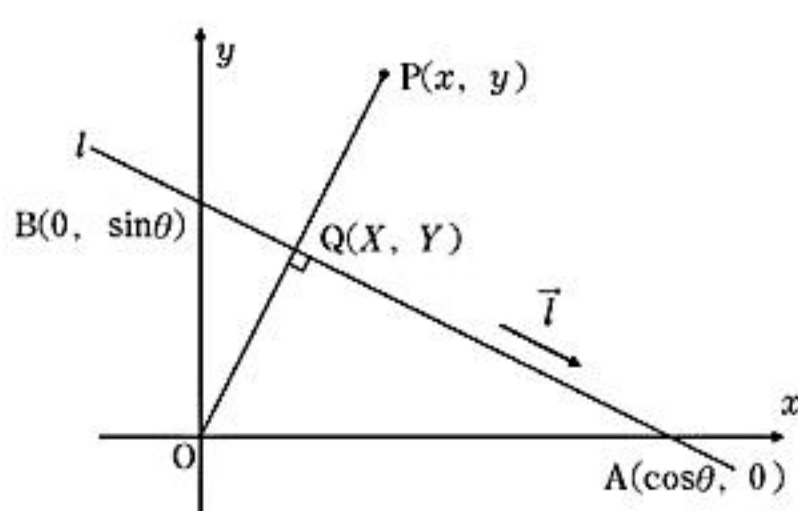
$x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 3 > 0$ だから, $f(t+1) = 0$ ($t \neq 0$) となるのは,

$$t+1 = -1, -2 \quad \therefore t = -2, -3 \quad \cdots \text{ (答)}$$

$$t = -2 \text{ のとき, } A = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \quad \cdots \text{ (答)}$$

$$t = -3 \text{ のとき, } A = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \quad \cdots \text{ (答)}$$

3. (1)



2点 $A(\cos\theta, 0)$, $B(0, \sin\theta)$ を通る直線を l とし, その方向ベクトルを $\vec{l} = (\cos\theta, -\sin\theta)$ とする.

線分 OP と l との交点を $Q(X, Y)$ とすると, Q は l 上にあるから

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + t\vec{l} = (t\cos\theta, (1-t)\sin\theta)$$

と表せる. $\vec{l} \perp \overrightarrow{OQ}$ より

$$\vec{l} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0 \iff t\cos^2\theta - (1-t)\sin^2\theta = 0, \quad t = \sin^2\theta$$

$$\therefore (x, y) = \overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OQ} = (2\sin^2\theta\cos\theta, 2\sin\theta\cos^2\theta) \quad \dots (\text{答})$$

$$(2) (1) \text{ より } x = 2\sin^2\theta\cos\theta \text{ より } \frac{dx}{d\theta} = 4\sin\theta\cos^2\theta - 2\sin^3\theta$$

$$\begin{aligned} y \cdot \frac{dx}{d\theta} &= 2\sin\theta \cdot \cos^2\theta \cdot (4\sin\theta\cos^2\theta - 2\sin^3\theta) \\ &= 4\sin^2\theta \cdot \cos^2\theta \cdot (2\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ &= \sin^2 2\theta \cdot \left\{ (1 + \cos 2\theta) - \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) \right\} \\ &= \frac{1}{2}\sin^2 2\theta(1 + 3\cos 2\theta) \quad \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

(3) $(x_1, y_1) = (2\sin^2\theta\cos\theta, 2\sin\theta\cos^2\theta)$ とおき, この θ を $\frac{\pi}{2} - \theta$ でおきかえたものを (x_2, y_2) とすると

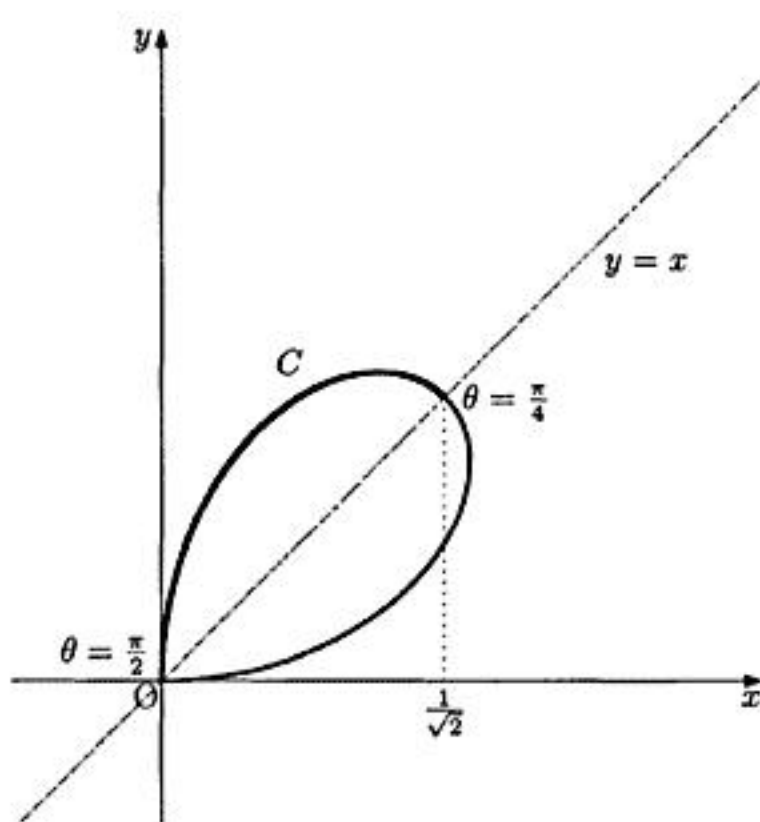
$$(x_2, y_2) = (2\cos^2\theta\sin\theta, 2\cos\theta\sin^2\theta) = (y_1, x_1)$$

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき, $\frac{\pi}{2} \geq \frac{\pi}{2} - \theta \geq 0$ であるから, 点 P の描く曲線 C は, 直線 $y = x$ に関して対称である. ■

(4) $\theta = 0$ のとき, $(x, y) = (0, 0)$ であり, $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき, $(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ である.

また, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ のとき, $y - x = 2\sin\theta\cos\theta(\cos\theta - \sin\theta) \geq 0$ より $y \geq x$

$0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}$ のとき, $\frac{dx}{d\theta} > 0$ であるから, (3) より曲線 C は下図のようになる.



求める面積 S は

$$S = 2 \left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} y dx - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} y \cdot \frac{dx}{d\theta} \cdot d\theta - \frac{1}{4} \right)$$

ここで

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} y \cdot \frac{dx}{d\theta} \cdot d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2\theta(1 + 3\cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 4\theta) d\theta + \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2\theta \cdot \cos 2\theta d\theta \\ &= \frac{1}{4} \left[\theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} [\sin^3 2\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{16} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となるから

$$S = 2 \left(\frac{\pi}{16} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{8} \quad \dots (\text{答})$$

(コメント)

$$(4) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sin 2\theta \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

となり, 曲線 C を極方程式で表すと $r = \sin 2\theta$ なので

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{4} \left[\theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{8} \quad \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

この曲線は正葉曲線と呼ばれる曲線の部分である。