

数 学

1. 監督者の指示があるまで開いてはいけない。
2. 解答は別紙の解答用紙に記入しなさい。
3. 問題用紙は各科目の試験終了後持ち帰ってもよい。
ただし、試験途中では持ち出してはいけない。

1. 次の にあてはまる答えを解答欄に記入せよ。

- (1) 三角形 ABC の辺 AB, AC の長さはそれぞれ 4, 5 であり $\cos A = \frac{1}{8}$ である。この三角形の内心を I とし、ベクトル $\overrightarrow{AI}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ を用いて表したい。∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とする。

まず、辺 BC の長さは (ア) である。次に、線分比 BD : DC を、つづいて AI : ID を容易に求めることができる。これを用いれば、 $\overrightarrow{AI}$ を

$$\overrightarrow{AI} = \text{ (イ) } \overrightarrow{AD} = \text{ (ウ) } \overrightarrow{AB} + \text{ (エ) } \overrightarrow{AC}$$

と表せる。このことから $|\overrightarrow{AI}| = \text{ (オ) }$ も得られる。

- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$ を定積分で表せば (カ) であり、この値は (キ) である。

さらに、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{n}}{n^2 + k^2} = \text{ (ク) }$ であることが分る。

- (3) 1 から n までの番号がひとつずつ書かれた n 枚のカード ($n \geq 7$) から、同時に 4 枚を抜き出す。この試行において、確率 p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 を次のように定める。

p_1 : 4 枚の番号が連続する確率,

p_2 : 1 2 ; 5 6 のように 4 枚は連続せず、2 枚だけ番号が連続するカードが 2 組である確率,

p_3 : 1 2 3 ; 6 のように 4 枚でなく 3 枚だけの番号が連続する確率,

p_4 : 1 2 ; 4 ; 6 のように 3 枚は連続せず、2 枚だけ番号が連続する確率,

p_5 : どのふたつの番号も連続しない確率。

このとき、 $p_1 = \text{ (ケ) }, p_2 = \text{ (コ) }, p_3 = \text{ (サ) },$

$p_4 = \frac{12(n-4)(n-5)}{n(n-1)(n-2)}, p_5 = \frac{(n-4) \cdot \text{ (シ) }}{n(n-1)(n-2)}$ である。

2. 以下の設問(1), (2)に答えよ。

(1) 次の文章を読んで、最後にある下線部の設問に答えよ。

A を 2×2 行列, $f(x)$ を n 次の多項式とする。 x に A を代入し, 1 を単位行列 E におきかえて得られる行列を $f(A)$ と表す。すなわち $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ ($n \geq 1$) のとき $f(A) = A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_{n-1} A + a_n E$ である。

また, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して, 2 次の多項式

$$g(x) = x^2 - (a + d)x + (ad - bc)$$

を行列 A の固有多項式ということにする。

さて, 次の定理を証明したい。

定理 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は単位行列の定数倍ではないとし, $f(x)$ を x の 2 次以上の多項式とする。

このとき, $f(x)$ が A の固有多項式 $g(x)$ で割り切れるための必要十分条件は $f(A) = O$ (O は零行列) となることである。

証明 まず,

$$g(A) = A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E = O \cdots \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つことがわかる。

さて, $f(x)$ が $g(x)$ で割り切れれば, $f(x) = g(x)h(x)$ となる整式 $h(x)$ があるから, x に A を代入し, 1 を E におきかえれば, 式①により $f(A) = O$ である。

逆に, $f(A) = O$ とする。 $f(x)$ を $x^2 - (a + d)x + (ad - bc)$ で割った商を $q(x)$, 剰余を $ax + \beta$ とし, この後を解答用紙に記述して定理の証明を完成せよ。

(2) s, t は実数で, $t \neq 0$ とする。行列 $A = \begin{pmatrix} 2t-1 & t-2 \\ -2(t-1) & -t+3 \end{pmatrix}$ が

$$A^5 - (s-1)A^3 + 4sA^2 - 8E = O$$

をみたすとき, s, t の値およびそのときの行列 A を求めよ。

3. O を原点とする座標平面上の 2 点 $(\cos \theta, 0)$, $(0, \sin \theta)$ を通る直線がある。この直線に関する原点 O の対称点を P として, θ を $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で変化させるとき, 点 P の描く曲線を C とする。

以下の設問に答えよ。

(1) 点 P の座標を (x, y) とするとき, x, y を θ を用いて表せ。

(2) $y \frac{dx}{d\theta}$ を, 2θ を用いて表せ。

(3) 曲線 C は直線 $y = x$ に関して対称であることを示せ。

(4) 曲線 C によって囲まれる部分の面積を求めよ。