

1.

$$(1) \quad \underbrace{1, 2, \dots, k-1}_{k-1 \text{ 個}}, \underbrace{k, k+1, \dots, n}_{n-k \text{ 個}}$$

$X=k$ のとき, 1 から $k-1$ までの $k-1$ 個の球から 1 個

$k+1$ から n までの $n-k$ 個の球から 1 個選べばよいから,

$$P(X=k) = \frac{{}_{k-1}C_1 \cdot {}_{n-k}C_1}{{}_nC_2} = \frac{6}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)} \cdot (k-1)(n-k) \quad (2 \leq k \leq n-1)$$

$k=1, n$ のとき, $P(X=k)=0$ で上式は成り立つ.

$$\text{よって } 1 \leq k \leq n \text{ で, } P(X=k) = \frac{6(k-1)(n-k)}{n(n-1)(n-2)} \quad (n \geq 3) \quad \dots\dots (7)$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^n k \cdot P(X=k) = \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \sum_{k=1}^n k \cdot (k-1)(n-k)$$

$$= \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \sum_{k=1}^n \{-k^3 + (n+1)k^2 - nk\}$$

$$= \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \left\{ -\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + \frac{1}{6}n \cdot 2(n+1)^2(2n+1) - \frac{1}{2}n^2(n+1) \right\}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2n(n-1)(n-2)} \{-3n(n+1) + 2(n+1)(2n+1) - 6n\}$$

$$= \frac{(n+1)}{2(n-1)(n-2)} \cdot (n^2 - 3n + 2) = \frac{n+1}{2} \quad \dots\dots (4)$$

$$(2) \quad \overrightarrow{OP} = (s, s, s+2), \quad \overrightarrow{OQ} = (t, t+2, -t-1)$$

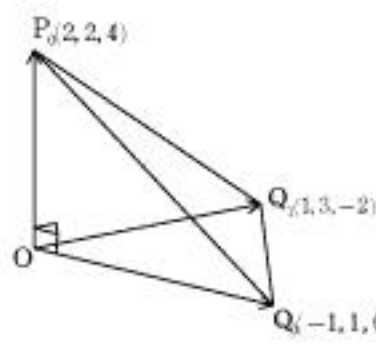
$$\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OQ} \text{ より } \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0 \iff st + s(t+2) - (s+2)(t+1) = 0$$

$$\iff 2s(t+1) - (s+2)(t+1) = 0$$

$$\iff (s-2)(t+1) = 0$$

$$\therefore s=2 \text{ または } t=-1$$

$$\dots\dots (7), (8)$$



$$t=-1 \text{ のとき, } \overrightarrow{OQ_0} = (-1, 1, 0)$$

$$t=1 \text{ のとき, } \overrightarrow{OQ_1} = (1, 3, -2)$$

$$|\overrightarrow{OQ_0}|^2 = 2, \quad |\overrightarrow{OQ_1}|^2 = 14, \quad \overrightarrow{OQ_0} \cdot \overrightarrow{OQ_1} = 2$$

となるから,

$$\triangle OQ_0Q_1 = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OQ_0}|^2 |\overrightarrow{OQ_1}|^2 - (\overrightarrow{OQ_0} \cdot \overrightarrow{OQ_1})^2} = \underline{\underline{\sqrt{6}}} \quad \dots\dots (4)$$

$$\overrightarrow{OP_0} \perp \overrightarrow{OQ_0}, \quad \overrightarrow{OP_0} \perp \overrightarrow{OQ_1} \text{ より } \overrightarrow{OP_0} \perp \text{平面} OQ_0Q_1, \quad |\overrightarrow{OP_0}| = 2\sqrt{6}$$

$$\text{となるから, 四面体 } OP_0Q_0Q_1 = \frac{1}{3} \cdot \triangle OQ_0Q_1 \cdot |\overrightarrow{OP_0}| = 4 \quad \dots\dots (5)$$

$$(3) \quad p = x^2 + xy + y^2$$

$$q = x^2y + xy^2 = xy(x+y)$$

$$xy = r \text{ のとき, } x^2 + y^2 = p - r$$

$$D = \{(x-y)(x+2y)(2x+y)\}^2 = (x^2 + y^2 - 2xy) \cdot \{2(x^2 + y^2) + 5xy\}^2$$

$$= (p - 3r)(2p + 3r)^2 = 4p^3 - 27pr^2 - 27r^3 \quad \dots\dots (1)$$

$$= 4p^3 - 27(r^3 + pr^2)$$

$q = r(x+y)$ の辺々を 2 乗して,

$$q^2 = r^2(x^2 + y^2 + 2xy) = r^2(p + r) = \underline{\underline{r^3 + pr^2}}$$

$$\text{となるから, } D \text{ を } p, q \text{ の整式で表すと, } D = 4p^3 - 27q^2 \quad \dots\dots (2)$$

$$(4) \quad C: r = 3e^{2\theta} \quad (\theta \geq 0)$$

$$C \text{ 上の点を } (x, y) \text{ とおくと, } \begin{cases} x = r \cos \theta = 3e^{2\theta} \cos \theta \\ y = r \sin \theta = 3e^{2\theta} \sin \theta \end{cases}$$

$$A(3, 0), P(3e^{4n\pi}, 0)$$

$$\frac{dx}{d\theta} = 3e^{2\theta}(2\cos\theta - \sin\theta)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 3e^{2\theta}(\cos\theta + 2\sin\theta) \quad \text{となるから,}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{3e^{2\theta}(\cos\theta + 2\sin\theta)}{3e^{2\theta}(2\cos\theta - \sin\theta)}$$

$$= \frac{\cos\theta + 2\sin\theta}{2\cos\theta - \sin\theta}$$

$$P \text{ における接線 } l \text{ の傾きは } \theta = 2n\pi \text{ を上式に代入して, } \frac{1}{2} \quad \dots\dots (3)$$

$$\text{よって, } l: y = \frac{1}{2}(x - 3e^{4n\pi})$$

$$x=3 \text{ を代入して } Q \text{ の座標は } Q\left(3, -\frac{3}{2}(e^{4n\pi} - 1)\right) \text{ となり,}$$

$$PQ = \sqrt{9(1 - e^{4n\pi})^2 + \frac{9}{4}(e^{4n\pi} - 1)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}(e^{4n\pi} - 1) \quad (n > 0) \quad \dots\dots (4)$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{9e^{4\theta}(2\cos\theta - \sin\theta)^2 + 9e^{4\theta}(\cos\theta + 2\sin\theta)^2}$$

$$= 3\sqrt{5}e^{2\theta}$$

となるから, A から P までの曲線の長さは,

$$\int_0^{2n\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta = 3\sqrt{5} \int_0^{2n\pi} e^{2\theta} d\theta = \frac{3\sqrt{5}}{2} [e^{2\theta}]_0^{2n\pi}$$

$$= \frac{3\sqrt{5}}{2}(e^{4n\pi} - 1) \quad \dots\dots (5)$$

2.

$$\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = a, \quad \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} = b$$

$$(1) \quad \cos 4\theta = 2\cos^2 2\theta - 1 = 2(2\cos^2 \theta - 1)^2 - 1 = 8\cos^4 \theta - 8\cos^2 \theta + 1$$

$\cos 3\theta = -3\cos \theta + 4\cos^3 \theta$ となるから、

$$\cos 3\theta = \cos 4\theta \quad \dots (1) \iff -3\cos \theta + 4\cos^3 \theta = 8\cos^4 \theta - 8\cos^2 \theta + 1$$

$$\iff 8\cos^4 \theta - 4\cos^3 \theta - 8\cos^2 \theta + 3\cos \theta + 1 = 0$$

$$\cos \theta = x \text{ とおくと, } \quad 8x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 3x + 1 = 0 \quad \dots (2) \quad \dots (\text{答})$$

$$(2) \quad (2) \text{ を因数分解して, } (x-1)(8x^3 + 4x^2 - 4x - 1) = 0$$

$$\cos \frac{2\pi}{7} \neq 1 \text{ より } \cos \frac{2\pi}{7} \text{ が解の1つである3次式は}$$

$$8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0 \quad \dots (3) \quad \dots (\text{答})$$

$$(3) \quad \cos \frac{4\pi}{7}, \cos \frac{6\pi}{7} \text{ は(1)をみたし, } \cos \frac{2\pi}{7}, \cos \frac{4\pi}{7}, \cos \frac{6\pi}{7} \text{ はすべて異なる実数で, 1でないことより, (3)式の異なる3つの解となる.}$$

解と係数の関係より

$$\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} = \frac{1}{8}$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{8} \quad \dots (\text{答})$$

3.

$$f(x) = \int_0^1 \frac{2}{|2t-x|+3} dt, \quad 0 \leq x \leq 4 \quad \dots \textcircled{1}$$

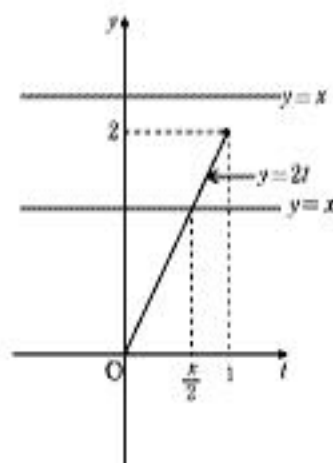
(1)

(i) $0 \leq x \leq 2$ のとき,

$$|2t-x| = \begin{cases} -(2t-x) & \left(0 \leq t \leq \frac{x}{2}\right) \\ 2t-x & \left(\frac{x}{2} \leq t \leq 1\right) \end{cases}$$

となるから,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{2}{-2t+x+3} dt + \int_{\frac{x}{2}}^1 \frac{2}{2t-x+3} dt \\ &= 2 \cdot \left[-\frac{1}{2} \log|-2t+x+3|\right]_0^{\frac{x}{2}} + 2 \cdot \left[\frac{1}{2} \log|2t-x+3|\right]_{\frac{x}{2}}^1 \\ &= -\{\log 3 - \log(x+3)\} + \{\log(5-x) - \log 3\} \\ &= \log(x+3) + \log(5-x) - 2\log 3 \end{aligned}$$

(ii) $2 \leq x \leq 4$ のとき, $|2t-x| = -(2t-x)$ ($0 \leq t \leq 1$)

となるから,

$$f(x) = \int_0^1 \frac{2}{-2t+x+3} dt = -\left[\log|-2t+x+3|\right]_0^1 = \log(x+3) - \log(x+1)$$

以上より

$$f(x) = \begin{cases} \log(x+3) + \log(5-x) - 2\log 3 & (0 \leq x \leq 2) \\ \log(x+3) - \log(x+1) & (2 \leq x \leq 4) \end{cases}$$

..... (答)

$$(2) \quad 0 \leq x \leq 2 \text{ のとき, } f'(x) = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{5-x} = \frac{2(1-x)}{(x+3)(5-x)}$$

$$f'(x) = 0 \text{ なる } x \text{ は } x=1$$

$$2 \leq x \leq 4 \text{ のとき, } f'(x) = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+1} = \frac{-2}{(x+1)(x+3)} < 0$$

 $0 \leq x \leq 4$ の範囲で増減表をかいて,

x	0		1		2		4
$f'(x)$		+	0	-	-	-	
$f(x)$		↗		↘		↘	

$$f(0) = \log 3 + \log 5 + \log \frac{1}{9} = \log \frac{5}{3}$$

$$f(1) = \log 4 + \log 4 + \log \frac{1}{9} = \log \frac{16}{9} = 2\log \frac{4}{3}$$

$$f(2) = \log 5 - \log 3 = \log \frac{5}{3}$$

$$f(4) = \log 7 - \log 5 = \log \frac{7}{5} \quad \text{となるから,}$$

$$\text{最大値 } f(1) = 2\log \frac{4}{3}, \quad \text{最小値 } f(4) = \log \frac{7}{5} \quad \dots\dots \text{ (答)}$$