

数 学

1. 監督者の指示があるまで開いてはいけない。
2. 解答は別紙の解答用紙に記入しなさい。
3. 問題用紙は各科目の試験終了後持ち帰ってもよい。
ただし、試験途中では持ち出してはいけない。

1. 次の にあてはまる答えを解答欄に記入せよ。

(1) n を 3 以上の整数とする。

1 から n までの数字がひとつずつ書かれた、合計 n 個の球が袋の中にある。無作為に 3 個の球を取り出し、書かれている数を小さい順に並べたときの中央の値を X とする。 X は確率変数である。

X が値 k をとる確率を求めると、 $P(X=k) = \text{ア}$ ($k=1, 2, \dots, n$) である。さらに、 X の平均(期待値)を求めると、 $E(X) = \text{イ}$ である。

(2) 原点を O とする空間に 2 点 $P(s, s, s+2)$, $Q(t, t+2, -t-1)$ (s, t は実数) がある。ベクトル $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ が垂直であるのは

$$s = \text{ウ} \quad \text{または} \quad t = \text{エ}$$

のときである。 s の値が ウ のときの点 P を P_0 とし、 t の値が エ , 1 のときの点 Q をそれぞれ Q_0, Q_1 とする。このとき、三角形 OQ_0Q_1 の面積は オ であり、四面体 $OP_0Q_0Q_1$ の体積は カ である。

(3) 変数 x, y の整式

$$p = x^2 + xy + y^2, \quad q = x^2y + xy^2$$

がある。このとき、整式

$$D = \{(x-y)(x+2y)(2x+y)\}^2$$

は整数を係数とする p, q の整式で表せる。これを求めるために、 $r = xy$ として、まず D を p と r の整式で表せば $D = \text{キ}$ である。これより、 D は p と q の整式として $D = \text{ク}$ のように表すことができる。

(4) 座標平面上に極方程式で与えられた曲線 $C: r = 3e^{2\theta}$ ($\theta \geq 0$) がある。 n を与えられた正の整数、 $\theta = 0$, $\theta = 2n\pi$ における曲線上の点を順に A, P とし、 P におけるこの曲線の接線を l , l と直線 $x = 3$ との交点を Q とする。

このとき、接線 l の傾きは ケ であり、線分 PQ の長さは コ である。一方、点 A から P までのこの曲線の長さは サ である。

2.

$$\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = a, \quad \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} = b$$

とする。 a と b の値を求めたい。以下の設問(1), (2), (3)に答えよ。

(1) 角 θ (ラジアン) が

$$\cos 3\theta = \cos 4\theta \cdots \cdots \textcircled{1}$$

をみたすとき、解のひとつが $\cos \theta$ であるような 4 次の方程式を求めよ。

(2) $\theta = \frac{2\pi}{7}$ のとき、 $\cos \theta$ が解のひとつであるような 3 次の方程式を求めよ。

(3) 設問(2)の結果を用いて、 a および b の値を求めよ。

3. 関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \int_0^1 \frac{2}{|2t - x| + 3} dt$$

によって定められている。この関数を

$$0 \leq x \leq 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

の範囲で考える。以下の設問に答えよ。

- (1) 定積分を計算して、 $\textcircled{1}$ の範囲における $f(x)$ を求めよ。
- (2) 増減、極値を調べて、 $\textcircled{1}$ の範囲における $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。