

1.

(1) $\triangle ABC$ に余弦定理を用いて

$$\cos C = \frac{5^2 + 6^2 - 4^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \boxed{\frac{3}{4}} \quad \dots\dots(\text{ア})$$

$$CD = \frac{2}{3} \times 6 = 4, CQ = x \text{ とおいて,}$$

$\triangle CQD$ に余弦定理を用いると

$$(\sqrt{11})^2 = x^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot x \cdot \cos C$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5) = 0$$

$$0 < x < 5 \text{ より } CQ = \boxed{1} \quad \dots\dots(\text{イ})$$

$BP = y$ とおくと、メネラウスの定理より

$$\frac{y}{y+4} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{2}{1} = 1 \Leftrightarrow 7y = 4$$

$$\therefore BP = \boxed{\frac{4}{7}} \quad \dots\dots(\text{ウ})$$

$$(2) p_n = p_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n, p_0 + p_1 + \dots\dots + p_n = 1$$

$$n=2 \text{ のとき, } p_0 + p_1 + p_2 = 1 \Leftrightarrow p_0 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 1$$

$$\therefore p_0 = \boxed{\frac{4}{7}} \quad \dots\dots(\text{エ})$$

このとき、期待値 $E(X)$ は $p_0 = \frac{4}{7}, p_1 = \frac{2}{7}, p_2 = \frac{1}{7}$ より

$$E(X) = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 = \boxed{\frac{4}{7}} \quad \dots\dots(\text{オ})$$

一般の場合

$$p_0 + p_1 + p_2 + \dots\dots + p_n = p_0 \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = p_0 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} = 1 \text{ より}$$

$$p_0 = \frac{\boxed{2^n}}{2^{n+1} - 1} \quad \dots\dots(\text{カ})$$

$$E(X) = p_0 \sum_{k=0}^n k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$S = \sum_{k=0}^n k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \text{ とおき, } S - \frac{1}{2}S \text{ を求めると,}$$

$$S = \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots\dots + n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$-) \quad \frac{1}{2}S = \quad 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots\dots + (n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots\dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{n}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+1} - (n+2)}{2^{n+1}}$$

$$\text{から } S = \frac{2^{n+1} - (n+2)}{2^n}$$

$$\therefore E(X) = \frac{2^n}{2^{n+1} - 1} \cdot \frac{2^{n+1} - (n+2)}{2^n} = \frac{\boxed{2^{n+1} - (n+2)}}{2^{n+1} - 1} \quad \dots\dots(\text{キ})$$

$$(3) \quad \tan \frac{5}{12}\pi = \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{6}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan \frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$$

$$= \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2} = \boxed{2 + \sqrt{3}} \quad \dots\dots(\text{ク})$$

$$I = \int_0^{2(2+\sqrt{3})} \frac{16}{(x^2 + 4)^2} dx$$

$$x = 2 \tan \theta \text{ とおくと, } dx = \frac{2}{\cos^2 \theta} d\theta$$

x	$0 \rightarrow 2(2 + \sqrt{3})$
θ	$0 \rightarrow \frac{5}{12}\pi$

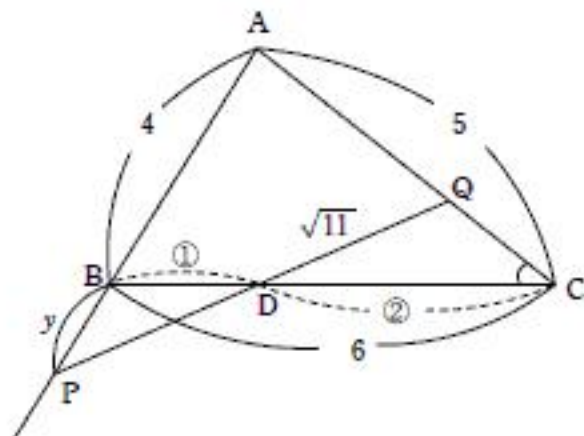
となるから

$$I = \int_0^{\frac{5}{12}\pi} \frac{16}{16(1 + \tan^2 \theta)^2} \cdot \frac{2}{\cos^2 \theta} d\theta = 2 \int_0^{\frac{5}{12}\pi} \cos^2 \theta d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{5}{12}\pi} (1 + \cos 2\theta) d\theta$$

$$= \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{5}{12}\pi} = \frac{5}{12}\pi + \frac{1}{2} \sin \frac{5}{6}\pi$$

$$= \boxed{\frac{5}{12}\pi + \frac{1}{4}} \quad \dots\dots(\text{ケ})$$



2.

(A)

$$(1) (\because) \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$$

 $a'd'-b'c' \neq 0$ より
 $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ で定まる分数関数を $h(x)$ とすると

$$h(x) = \frac{a'x+b'}{c'x+d'} = \frac{(ap+br)x+aq+bs}{(cp+dr)x+cq+ds} \quad \dots\dots(1)$$

一方

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, g(x) = \frac{px+q}{rx+s} \quad \text{であり}$$

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= \frac{ag(x)+b}{cg(x)+d} = \frac{a\left(\frac{px+q}{rx+s}\right)+b}{r\left(\frac{px+q}{rx+s}\right)+s} \\ &= \frac{(ap+br)x+aq+bs}{(cp+dr)x+cq+ds} \quad \dots\dots(2) \end{aligned}$$

(1), (2) より, $h(x) = f(g(x))$ ■

(B)

$$x_{n+1} = \frac{2x_n+3}{x_n} \quad (x_1=1) \quad (n=1, 2, \dots\dots) \quad \dots\dots(1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \quad (n=1, 2, \dots\dots) \quad \dots\dots(*)$$

$$(1) \quad x_{n+1} = \frac{a_n x_1 + b_n}{c_n x_1 + d_n} \quad (n=1, 2, \dots\dots) \quad \dots\dots(2)$$

 $(\because)$ $n=1$ のとき, $(*)$ より

$$A' = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{より } a_1=2, b_1=3, c_1=1, d_1=0$$

$$\textcircled{1} \text{ から } x_2 = \frac{2x_1+3}{x_1} = \frac{a_1 x_1 + b_1}{c_1 x_1 + d_1} \quad \text{となり}$$

 $\textcircled{2}$ は成り立つ.

$$n=k \text{ のとき, 成り立つと仮定する. すなわち } x_{k+1} = \frac{a_k x_1 + b_k}{c_k x_1 + d_k}$$

 $n=k+1$ のとき,

$$\textcircled{1} \text{ より, } x_{k+2} = \frac{2x_{k+1}+3}{x_{k+1}} = \frac{2\left(\frac{a_k x_1 + b_k}{c_k x_1 + d_k}\right)+3}{\frac{a_k x_1 + b_k}{c_k x_1 + d_k}} = \frac{(2a_k+3c_k)x_1+2b_k+2d_k}{a_k x_1 + b_k}$$

ここで, $(*)$ より

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= \begin{pmatrix} a_{k+1} & b_{k+1} \\ c_{k+1} & d_{k+1} \end{pmatrix} = A \cdot A^k = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2a_k+3c_k & 2b_k+3d_k \\ a_k & b_k \end{pmatrix} \quad \text{となるから,} \\ x_{k+2} &= \frac{(2a_k+3c_k)x_1+2b_k+3d_k}{a_k x_1 + b_k} \\ &= \frac{a_{k+1} x_1 + b_{k+1}}{c_{k+1} x_1 + d_{k+1}} \quad \text{となり,} \end{aligned}$$

 $\textcircled{2}$ は $n=k+1$ のときも成り立ち, すべての自然数 n で $\textcircled{2}$ は成り立つ. ■

$$(2) \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{であるから,}$$

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

$$\text{辺々 } n \text{ 乗して, } (P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n$$

$$(P^{-1}AP)^n = \underbrace{P^{-1}AP \cdot P^{-1}AP \cdot \dots\dots P^{-1}AP}_{n \text{ 回}} = P^{-1}A^n P$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \quad \text{となるから}$$

$$P^{-1}A^n P = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore A^n &= P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (-1)^n & 3 \cdot 3^n \\ -(-1)^n & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \cdot 3^n + (-1)^n & 3 \cdot 3^n - 3(-1)^n \\ 3^n - (-1)^n & 3^n + 3(-1)^n \end{pmatrix} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

(3) (2) より

$$a_n = \frac{3 \cdot 3^n + (-1)^n}{4}, b_n = \frac{3 \cdot 3^n - 3(-1)^n}{4},$$

$$c_n = \frac{3^n - (-1)^n}{4}, d_n = \frac{3^n + 3(-1)^n}{4}$$

を $\textcircled{2}$ 式に代入して,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{3 \cdot 3^n + (-1)^n + 3 \cdot 3^n - 3(-1)^n}{3^n - (-1)^n + 3^n + 3(-1)^n} \\ &= \frac{2(3^{n+1} + (-1)^{n+1})}{2(3^n + (-1)^n)} \\ \therefore x_{n+1} &= \frac{3^{n+1} + (-1)^{n+1}}{3^n + (-1)^n} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

3. 条件①: すべての実数 x, y で, $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ $\cdots (*)$

条件②: $f(x)$ は微分可能な関数.

(A)

(A・1)

ある実数 a で $f(a) = 0 \longrightarrow$ 任意の実数 x で $f(x) = 0$

($\because$) $(*)$ 式で $x = a, y = -a$ とおくと,

$$f(0) = f(a) \cdot f(-a)$$

$$f(a) = 0 \text{ より } f(0) = 0$$

$$(*) \text{ 式で } y = 0 \text{ とおいて, } f(x) = f(x) \cdot \underbrace{f(0)}_0 = 0 \therefore f(x) = 0$$

(A・2)

すべての実数 a で $f(a) \neq 0 \longrightarrow f(0) = 1$

($\because$) $(*)$ 式で $x = a, y = 0$ とおくと,

$$f(a) = f(a) \cdot f(0) \iff f(a) \cdot \{f(0) - 1\} = 0$$

$$f(a) \neq 0 \text{ ならば } f(0) = 1$$

(B) $f(x)$, 条件①, ②をみたし, $f(x) \neq 0$

(1) すべての実数 x で $f(x) > 0$

($\because$) ある実数 a で $f(a) < 0$ と仮定する.

すべての実数 a で $f(a) \neq 0$ より (A・2) から $f(0) = 1$

$f(x)$ は微分可能な関数であるから, 連続な関数で,

$f(a) < 0$ かつ $f(0) = 1$ より $f(x) = 0$ となる x が少なくとも1つ

存在する (中間値の定理). これはすべての x で $f(x) \neq 0$ と

なることに矛盾. よって, すべての実数 x で $f(x) > 0$.

(2) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ の極限值が存在するとき, これが $x = a$ における

$$\text{微分係数で, } f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

(3) すべての実数 x で

$$f'(x) = f(x) \cdot f'(0)$$

$$\begin{aligned} (\because) f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot f(h) - f(x)}{h} \\ &= f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f(x) \cdot f'(0) \quad (f(0) = 1) \end{aligned}$$

$$\therefore f'(x) = f(x) \cdot f'(0)$$

(4) $f'(0) = k$ (3) より $f'(x) = kf(x)$

$$f(x) > 0 \text{ より } \frac{f'(x)}{f(x)} = k$$

辺々を x で積分して,

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = k \int dx$$

$$\log |f(x)| = kx + C$$

$x = 0$ を代入して, $f(0) = 1$ から $C = 0$

$$\therefore \underline{f(x) = e^{kx}} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$