

数 学

1. 監督者の指示があるまで開いてはいけない。
2. 解答は別紙の解答用紙に記入しなさい。
3. 問題用紙は各科目の試験終了後持ち帰ってもよい。
ただし、試験途中では持ち出してはいけない。

1. 次の にあてはまる答えを解答欄に記入せよ。

- (1) $\triangle ABC$ は、三辺 AB , BC , CA の長さがこの順に 4, 6, 5 であり、点 D は辺 BC を 1 : 2 に内分している。

辺 AB の延長上に点 P をとり、 PD の延長と辺 AC との交点を Q とするとき、線分 DQ の長さが $\sqrt{11}$ であった。このとき、 $\cos C =$ (ア) であり、線分 CQ の長さは (イ) である。線分比を考えることにより、線分 BP の長さは (ウ) であることが分かる。

- (2) n は正整数とする。確率変数 X は 0 から n までの整数値を値にとり、 $X = k$ となる確率 p_k のつくる数列 $p_0, p_1, \dots, p_n$ は、初項 p_0 、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるという。

とくに $n = 2$ の場合は、 $p_0 =$ (エ) であり、さらに X の期待値は $E(X) =$ (オ) である。一般の場合は、 n を用いて $p_0 = \frac{\text{ (カ)}}{2^{n+1} - 1}$ と表わされ、 $E(X) = \frac{\text{ (キ)}}{2^{n+1} - 1}$ である。

- (3) $\tan \frac{5\pi}{12}$ の値を求め、分母を有理化して簡単に表せば、 $\tan \frac{5\pi}{12} =$ (ク) である。このことから、定積分 $I = \int_0^{2(2+\sqrt{3})} \frac{16}{(x^2 + 4)^2} dx$ の値は、 $I =$ (ケ) であることが分かる。

2. 以下の設問(A)の(1)および(B)の(1), (2), (3)に答えよ。ただし, (A)と(B)は独立した問題である。(A)に答えられなくても(B)に答えてよい。

- (A) 与えられた行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (ただし $ad - bc \neq 0$) に対して, 分数関数

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \text{ が定まる。}$$

- (1) ふたつの行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (ただし $ad - bc \neq 0$), $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ (ただし $ps - qr \neq 0$)

で定まる分数関数をそれぞれ $f(x)$, $g(x)$ とする。

また, ふたつの行列の積を

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

とするとき, $a'd' - b'c' = (ad - bc)(ps - qr) \neq 0$ であることが分かっている。

次の命題が成り立つことを証明せよ。

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \text{ で定まる分数関数は, 合成関数 } f(g(x)) \text{ である。}$$

- (B) 漸化式

$$x_{n+1} = \frac{2x_n + 3}{x_n} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad \dots\dots ①$$

と, 初項 $x_1 = 1$ で与えられた数列 $\{x_n\}$ の第 $n + 1$ 項 x_{n+1} を n を用いて表したい。

行列 A を $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とし, $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ ($n = 1, 2, \dots$) とする。

- (1) 漸化式①で与えられた数列 $\{x_n\}$ について,

$$x_{n+1} = \frac{a_n x_1 + b_n}{c_n x_1 + d_n} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad \dots\dots ②$$

が成り立つことを, 数学的帰納法によって証明せよ。

- (2) $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ とする。 $P^{-1}AP$ を求め, さらに A^n を n を用いて表せ。

- (3) 数列 $\{x_n\}$ の第 $n + 1$ 項 x_{n+1} ($n = 1, 2, \dots$) を n を用いて表せ。

3. 関数 $f(x)$ は実数全体で定義されている。

$f(x)$ が次の条件①および②をみたすとき、 $f(x)$ を求めたい。

条件①：すべての実数 x, y について、 $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ が成り立つ。

条件②：微分可能な関数である。

すなわち、すべての実数 a について微分係数 $f'(a)$ が定まる。

以下の設問(A)および(B)の(1), (2), (3), (4)に答えよ。(A)で述べられた結果は(B)で用いてよい。

(A) 関数 $f(x)$ が条件①をみたすとき、次の命題(A.1), (A.2)が成り立つことを証明せよ。必要ならば $0 = a + (-a)$ であることを用いよ。

(A.1) ある実数 a について $f(a) = 0$ ならば、すべての実数 x について $f(x) = 0$ である。

(A.2) すべての実数 a について $f(a) \neq 0$ ならば、 $f(0) = 1$ である。

(B) 関数 $f(x)$ が条件①および②をみたし、かつ 0 を値にとらないとする。

(1) すべての実数 x について $f(x) > 0$ であることを、背理法によって証明せよ。必要ならば「微分可能な関数は連続である」ことを用いよ。

(2) $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ の定義の式を記せ。

(3) すべての実数 x について

$$f'(x) = f(x) \cdot f'(0)$$

であることを示せ。

(4) $f'(0) = k$ とする。不定積分 $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ を考えることにより $f(x)$ を求め、 k を用いて表せ。