1．

(1) $\mathrm{AB}=\boxed{\dfrac{1}{2}}$ ……(ア)　　$r=\boxed{\dfrac{\sqrt{21}}{6}}$ ……(イ)

(2) $p_n=\boxed{\dfrac{126(n-7)}{n(n-1)(n-2)}}$ ……(ウ)，$n=\boxed{10}$ ……(エ)

(3) $x=\boxed{2}$ ……(オ)　　$y=\boxed{-1}$ ……(カ)

$(a,b)=\boxed{(3,1)}$ …(キ)，$\boxed{(0,-1)}$ …(ク)　((キ)(ク)交換可)

2． $f(x)=\begin{cases}2^x-1 & (x\geqq 0)\\ 1-2^{-x} & (x<0)\end{cases}$， $g(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$

(1)

(i) $h(0)=1\cdot(f(0)-g(0))=0-0=0$ ……(答)

$h(1)=2\cdot(f(1)-g(1))=2(1-1)=0$ ……(答)

(ii) $x>0$ のとき

$$h(x)=(x^2+1)(f(x)-g(x))$$
$$=(x^2+1)\cdot f(x)-(x^2+1)\cdot\frac{2x}{x^2+1}$$
$$=(x^2+1)f(x)-2x$$
$$h'(x)=2xf(x)+(x^2+1)f'(x)-2$$
$$h''(x)=2f(x)+2xf'(x)+2xf'(x)+(x^2+1)f''(x)$$
$$=2f(x)+4xf'(x)+(x^2+1)f''(x)$$

$x>0$ で

$f(x)=2^x-1>0$

$f'(x)=(\log 2)\cdot 2^x>0$

$f''(x)=(\log 2)^2\cdot 2^x>0$ となるから $h''(x)>0$ ……(答)

(iii) $0\leqq x\leqq 1$ のとき 平均値の定理より, $\dfrac{h(1)-h(0)}{1-0}=h'(c),\ 0<c<1$

$\begin{pmatrix}0\leqq x\leqq 1 \text{ で } h(x)\text{は連続かつ}\\ 0<x<1 \text{ で } h(x)\text{は微分可能}\end{pmatrix} \iff h'(c)=0,\ 0<c<1$

$y=h'(x),\ (0<x<1)$ とおくと, $y'=h''(x)>0$ より $h'(x)$ は単調に増加する関数.

$h'(0)=f'(0)-2=\log 2-2<0$

$h'(1)=2f(1)+2f'(1)-2$

$=4\log 2-1=\log 16-1>0$

よって, $h'(x)=0$ となる x は $0<x<1$ にただ1つ存在する.

(2)

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ は原点に関して対称である.

$x\geqq 0$ のとき, (1) より $h'(x)=0$ なる c が $0<x<1$ にただ1つ存在し,

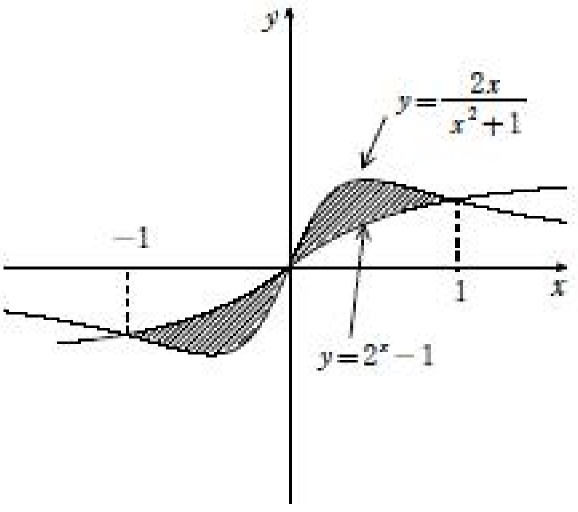
$h'(x)$ は単調に増加する関数であるから

原点対称を考慮して

x	0		c		1
$h'(x)$		−	0	+	
$h(x)$	0	↘		↗	0

$$\begin{cases}0<x<1 \text{ のとき}, & h(x)<0 \text{ より} & f(x)<g(x)\\ 1<x \text{ のとき}, & h(x)>0 \text{ より} & f(x)>g(x)\\ x=0,1 \text{ のとき}, & h(x)=0 \text{ より} & f(x)=g(x)\\ -1<x<0 \text{ のとき}, & h(x)>0 \text{ より} & f(x)>g(x)\\ x<-1 \text{ のとき}, & h(x)<0 \text{ より} & f(x)<g(x)\\ x=-1 \text{ のとき}, & h(x)=0 \text{ より} & f(x)=g(x)\end{cases}$$ ……(答)

(3)



求める体積 V は

$$V=2\pi\left\{\int_0^1\frac{4x^2}{(x^2+1)^2}dx-\int_0^1(2^x-1)^2dx\right\}$$

ここで,

$\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx$ は $x=\tan\theta$ とおくと,

$$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

x	$0\to 1$
θ	$0\to\frac{\pi}{4}$

$$\int_0^1\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2\theta}{(1+\tan^2\theta)^2}\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta\cdot\cos^2\theta d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta d\theta=\frac{1}{2}\left[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$$

$$\int_0^1(2^x-1)^2dx=\int_0^1(4^x-2\cdot 2^x+1)dx$$
$$=\left[\frac{4^x}{\log 4}-\frac{2\cdot 2^x}{\log 2}+1\right]_0^1=\frac{4}{2\log 2}-\frac{4}{\log 2}+1-\frac{1}{2\log 2}+\frac{2}{\log 2}$$
$$=1-\frac{1}{2\log 2}$$

$$\therefore\ V=2\pi\left(\frac{\pi}{2}-1-1+\frac{1}{2\log 2}\right)=\pi\left(\pi+\frac{1}{\log 2}-4\right)$$ ……(答)

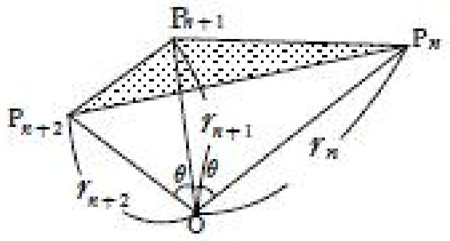
3．

(1)　$x_n = \boxed{\dfrac{1}{2^n}\{(\cos n\theta)x_0 - (\sin n\theta)y_0\}}$　　……(ケ)

$y_n = \boxed{\dfrac{1}{2^n}\{(\sin n\theta)x_0 + (\cos n\theta)y_0\}}$　　……(コ)

(2)　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}\right| = r_n$ とおくと，

$r_{n+1} = \dfrac{1}{2}r_n$　$\left(r_0 = \sqrt{x_0{}^2 + y_0{}^2}\right)$ から $r_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n r_0$



$S_n = \triangle \mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1} + \triangle \mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2} - \triangle \mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+2}$

$\triangle \mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1} = \dfrac{1}{2}\cdot r_n \cdot r_{n+1}\sin\theta$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{r_0}{2^n}\right)\left(\dfrac{r_0}{2^{n+1}}\right)\sin\theta = \dfrac{r_0{}^2\sin\theta}{4}\left(\dfrac{1}{4^n}\right)$

$\triangle \mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2} = \dfrac{1}{2}\cdot r_{n+1} \cdot r_{n+2}\sin\theta$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{r_0}{2^{n+1}}\right)\left(\dfrac{r_0}{2^{n+2}}\right)\sin\theta = \dfrac{r_0{}^2\sin\theta}{16}\left(\dfrac{1}{4^n}\right)$

$\triangle \mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+2} = \dfrac{1}{2}\cdot r_{n+1} \cdot r_{n+2}\sin 2\theta$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{r_0}{2^n}\right)\left(\dfrac{r_0}{2^{n+2}}\right)\sin 2\theta = \dfrac{r_0{}^2\sin 2\theta}{8}\left(\dfrac{1}{4^n}\right)$

$S_n = \dfrac{r_0{}^2}{16}(4\sin\theta + \sin\theta - 2\sin 2\theta)\cdot\dfrac{1}{4^n}$

$= \dfrac{r_0{}^2}{16}(5\sin\theta - 2\sin 2\theta)\cdot\dfrac{1}{4^n}$

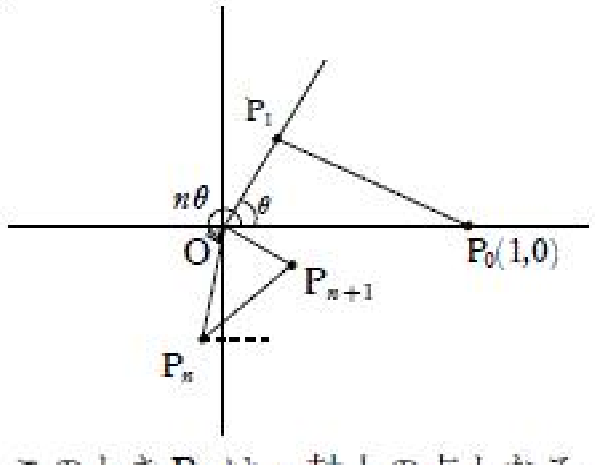
$\sum_{n=0}^{\infty} S_n$ は，初項 $\dfrac{x_0{}^2 + y_0{}^2}{16}(5\sin\theta - 2\sin 2\theta)$，公比 $\dfrac{1}{4}$ の無限等比級数で

あるから，収束し，$\left(0 < 公比\dfrac{1}{4} < 1\right)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n = \frac{\frac{1}{16}\left(x_0{}^2 + y_0{}^2\right)(5\sin\theta - 2\sin 2\theta)}{1 - \frac{1}{4}}$$

$= \dfrac{1}{12}\left(x_0{}^2 + y_0{}^2\right)(5\sin\theta - 2\sin 2\theta)$　　……(答)

(3)



$\mathrm{P}_1\left(\dfrac{1}{2}\cos\theta, \dfrac{1}{2}\sin\theta\right)$ より

$\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1} = \left(\dfrac{1}{2}\cos\theta - 1, \dfrac{1}{2}\sin\theta\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1} \,/\!/\, \overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$ となるとき，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}_0} \,/\!/\, \overrightarrow{\mathrm{OP}_n}$ が成り立つ．

このとき P_n は x 軸上の点となる．

P_n が x 軸上の点になるとき，$n\theta = k\pi$ $(k = 1, 2, \cdots)$ となる正の整数 k が存在するので．

∴　$\dfrac{\theta}{\pi} = \dfrac{k}{n}$ となり $\dfrac{\theta}{\pi}$ は有理数

また，$\dfrac{\theta}{\pi}$ が有理数であるとすると，$\dfrac{\theta}{\pi} = \dfrac{l}{m}$　(l, m は整数，$m \neq 0$)となるので，$n = m$ とすれば，$\sin n\theta = \sin l\pi = 0$ より，P_n の y 座標が 0 であるから P_n が x 軸上である．

（証明終）