数　　　学

1. 監督者の指示があるまで開いてはいけない。
2. 解答は別紙の解答用紙に記入しなさい。
3. 問題用紙は各科目の試験終了後持ち帰ってもよい。
   ただし，試験途中では持ち出してはいけない。

1. 次の $\boxed{}$ にあてはまる答えを解答欄に記入せよ。

(1) 半径 r の円に内接する四角形 ABCD が

$$\mathrm{AB} = \frac{\mathrm{CD}}{3}, \quad \mathrm{AB}^2 = \frac{\mathrm{BC}}{2} = \frac{\mathrm{DA}}{4}, \quad \cos\angle\mathrm{BAD} = -\frac{1}{2}$$

をみたしている。このとき，$\mathrm{AB} = \boxed{\text{(ア)}}$，$r = \boxed{\text{(イ)}}$ である。

(2) 袋の中に $n-3$ 個 $(n \geqq 8)$ の赤玉と 3 個の白玉が入っている。この袋から 7 個の玉を同時に取り出すとき，赤玉が 5 個となる確率 P_n を n を用いて表すと，$P_n = \boxed{\text{(ウ)}}$ である。また，P_n を最大にする n を求めると $n = \boxed{\text{(エ)}}$ である。

(3) 整数を成分とする 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ $(b \neq 0)$ がある。

$$AP = P\begin{pmatrix} a-b & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots ①$$

をみたすような 2 次の正方行列 $P = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 2 \end{pmatrix}$ を求めると，$x = \boxed{\text{(オ)}}$，$y = \boxed{\text{(カ)}}$ である。さらに，① を用いると

$$A^4 - 6A^3 + 9A^2 = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$

をみたす整数 a, b の組 (a, b) は $(a, b) = \boxed{\text{(キ)}}$ または $(a, b) = \boxed{\text{(ク)}}$ であることが分かる。

2. 実数全体で定義された次の関数 $f(x)$，$g(x)$ を考える。

$$f(x) = \begin{cases} 2^x - 1 & (x \geqq 0) \\ 1 - 2^{-x} & (x < 0) \end{cases}$$

$$g(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1) $x \geqq 0$ の範囲において，関数 $h(x)$ を $h(x) = (x^2+1)(f(x) - g(x))$ により定める。

(i) $h(0)$，$h(1)$ の値を求めよ。

(ii) $x > 0$ のとき $h''(x)$ の符号を調べよ。

(iii) 平均値の定理を用いて $h'(c) = 0$，$0 < c < 1$ をみたす実数 c が存在することを示せ。また，それはただ1つであることの理由を述べよ。

(2) $f(x)$ と $g(x)$ の大小を調べよ。

(3) 2 曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ で囲まれた部分を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積 V を求めよ。

3. θ を $0 < \theta < \pi$ の範囲にある定数とし，xy 平面上に原点 O と異なる定点 $\mathrm{P}_0(x_0,\ y_0)$ をとる。O を中心として，点 P_0 を正の向きに角 θ（ラジアン）回転した点と O を結ぶ線分の中点を $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$ とする。次に，O を中心として，点 P_1 を正の向きに角 θ 回転した点と O を結ぶ線分の中点を $\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$ とする。以下，同様にくりかえして，点 $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を定める。

このとき，次の問いに答えよ。とくに，問い (1) では $\boxed{}$ にあてはまる答えを解答欄に記入せよ。

(1) x_n と y_n をそれぞれ x_0，y_0，θ および n を用いて表せば，$x_n = \boxed{\text{(ケ)}}$，$y_n = \boxed{\text{(コ)}}$ である。

(2) $\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}$ の面積を S_n とするとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} S_n$ の和を x_0，y_0，θ を用いて表せ。

(3) 点 P_0 の座標を $(x_0,\ y_0) = (1,\ 0)$ とする。2つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1}$ と $\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$ が平行になるような正の整数 n が存在するための必要十分条件は，$\dfrac{\theta}{\pi}$ が有理数となることである。このことを示せ。