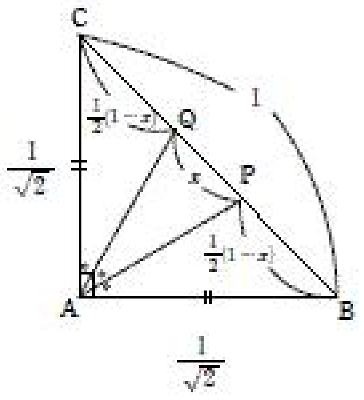
第１問

(A)

(1)　$\mathrm{PQ}=x\ \ (0<x<1)$ とおくと，



$$\mathrm{BP}=\mathrm{CQ}=\frac{1}{2}(1-x)$$

△ABP で余弦定理を用いて，

$$\mathrm{AP}^2=\frac{1}{4}(1-x)^2+\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{2}(1-x)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 45^\circ$$

$$=\frac{1}{4}(x^2-2x+1)-\frac{1}{2}(1-x)+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{4}(x^2+1)\qquad \therefore\ \mathrm{AP}=\frac{\sqrt{x^2+1}}{2}$$

$\mathrm{AP}=\mathrm{AQ}$ より，$\mathrm{AQ}=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2}$

内角の二等分線の定理より，

$$\frac{1}{\sqrt{2}}:\frac{\sqrt{x^2+1}}{2}=\frac{1}{2}(1-x):x$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{4}\sqrt{x^2+1}(1-x)=\frac{1}{\sqrt{2}}x$$

$$\therefore\ (x^2+1)(1-x)^2=8x^2$$

$$\Longleftrightarrow x^4-2x^3-6x^2-2x+1=0$$

$$\Longleftrightarrow (x+1)^2(x^2-4x+1)=0\qquad \therefore\ x=-1,\ 2\pm\sqrt{3}$$

ここで，$0<x<1$ に注意して，$\underline{\mathrm{PQ}=x=2-\sqrt{3}}$ $\boxed{(ア)}$　……(答)

(2)

3 個のさいころの目の出方は，
$\left.\begin{array}{l}(2,2,3)\cdots\cdots 3\text{ 通り}\\(2,3,3)\cdots\cdots 3\text{ 通り}\end{array}\right\}6\text{ 通り}$

$$\therefore\ P\,(X=3\text{ かつ }Y=2)=\frac{6}{6\times6\times6}=\underline{\frac{1}{36}}\ \boxed{(イ)}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

一般に，$Y=k,\ X=k+1\ \ (1\leqq k\leqq 5)$ とおくと，

n 個のさいころの目の出方は，k が i 回，$(k+1)$ が $n-i$ 回出たとすると，

$\sum_{i=1}^{n-1}{}_n\mathrm{C}_i={}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}=2^n-2$ より，

$$\therefore\ P(X-Y=1)=\frac{\sum_{k=1}^{5}(2^n-2)}{6^n}=\underline{\frac{5(2^n-2)}{6^n}}\ \boxed{(ウ)}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　$x=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i}{2}$ を解にもつなら，$x=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}\,i}{2}$ も解であるので，

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i}{2}+\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}\,i}{2}=\sqrt{2}\\[2mm]\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}\,i}{2}=2\end{cases}$$
より，$x^2-\sqrt{2}x+2$ を因数にもち，

$x^3+ax^2+(2+\sqrt{2})x+b$ は $x^2-\sqrt{2}x+2$ で割り切れる．

$$\begin{array}{r|l}
 & x+(a+\sqrt{2})\\ \hline
x^2-\sqrt{2}x+2 & x^3+ax^2+(2+\sqrt{2})x+b\\
 & x^3-\sqrt{2}x^2+2x\\ \hline
 & (a+\sqrt{2})x^2+\sqrt{2}x+b\\
 & (a+\sqrt{2})x^2+(-\sqrt{2}a-2)x+2a+2\sqrt{2}\\ \hline
 & (\sqrt{2}a+\sqrt{2}+2)x+b-2a-2\sqrt{2}
\end{array}$$

これより，

$$\begin{cases}\sqrt{2}a+\sqrt{2}+2=0\\ b-2a-2\sqrt{2}=0\end{cases}\qquad \therefore\ \underline{a=-\sqrt{2}-1}\ \boxed{(エ)},\ \underline{b=-2}\ \boxed{(オ)}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

このとき，

$$x^3+ax^2+(2+\sqrt{2})x+b=0 \Longleftrightarrow (x^2-\sqrt{2}x+2)(x-1)=0$$

$$\therefore\ x=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i}{2},\ \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}\,i}{2},\ 1$$

$\alpha=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}\,i}{2},\ \beta=1$ としてもよいので，

$\left(\dfrac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)^3=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3=-1$ より $\alpha^3=-2\sqrt{2}$ とわかる．

$$\therefore\ \alpha^{10}+\beta^{10}=(\alpha^3)^3\cdot\alpha+1^{10}=\left(-2\sqrt{2}\right)^3\cdot\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}\,i}{2}+1$$

$$=-8\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\,i\right)+1$$

$$=\underline{-15+16\sqrt{3}\,i}\ \boxed{(カ)}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

(B)

命題①「すべての奇数は A の要素である」が真であることを示す．

すべての奇数は，整数 n を用いて $2n+1$ と表せるので，

$a^2-b^2=2n+1$ を満たす整数 a,b がつねに存在すればよい．

ここで，$\begin{cases}a=n+1\\ b=n\end{cases}$ とおくと，$a^2-b^2=(n+1)^2-n^2=2n+1$

となり，<u>命題①は真であると示された．</u>

命題②「m が 4 の倍数であることは，m が A の要素であるための必要十分条件である」が真であることを示す．

(i)　m が 4 の倍数 $\Longrightarrow$ $m\in A$ について

$\begin{cases}a=n+1\\ b=n-1\end{cases}$ とおくと，$a^2-b^2=(n+1)^2-(n-1)^2=4n$

(ii)　$m\in A$ $\Longrightarrow$ m が 4 の倍数について

$$m=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

ところが，条件より m は偶数のため，$a+b$ と $a-b$ はともに偶数であることがわかる．

すなわち $a+b=2l,\ a-b=2l'$ (l,l' は整数) とおけるので，

$$\therefore\ m=(a+b)(a-b)$$

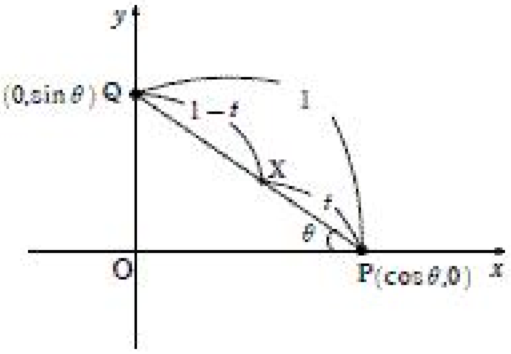
$$=2l\times 2l'$$

$$=4ll'$$

以上 (i)，(ii) より，<u>命題②は真であると示された．</u>

第２問

(1) 線分PQを $t:1-t$ に内分する点を $\mathrm{X}(x, y)$ とし，Xが第1象限にある場合を考える．



$\angle\mathrm{OPQ}=\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ と定めると，

$\mathrm{P}(\cos\theta, 0)$, $\mathrm{Q}(0, \sin\theta)$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=(x, y)=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PX}}$$
$$=(\cos\theta, 0)+t(-\cos\theta, \sin\theta)$$
$$\therefore\ \mathrm{X}:\begin{cases} x=(1-t)\cos\theta \\ y=t\sin\theta \end{cases}$$

これを同時に満たす実数 θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ に存在するから，

$$\frac{x^2}{(1-t)^2}+\frac{y^2}{t^2}=1$$

さらに，これは $\theta=0, \dfrac{\pi}{2}$ のときも満たし，x 軸，y 軸の対称性を考えると

求める曲線 C の方程式は，

$$\underline{\frac{x^2}{(1-t)^2}+\frac{y^2}{t^2}=1\ \ (0<t<1)}\cdots\cdots(答)$$

(2)

(i) 接線の一方が $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき，$-(1-t)=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\iff t=1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

このとき，曲線 C は $\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=1$ (楕円)となり，

$\mathrm{A}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$ を通るもう一方の接線 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ と C は接することはない．

$\left(\because\ 1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\neq\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$

(ii) $\mathrm{A}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$ を通り，傾き m の直線は，

$$y=m\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\frac{\sqrt{2}}{3}$$

これと曲線 C を連立して，

$$t^2x^2+(1-t)^2\left(mx+\frac{\sqrt{3}m+\sqrt{2}}{3}\right)^2=t^2(1-t)^2$$
$$\iff \{m^2(1-t)^2+t^2\}x^2+\frac{2}{3}m(\sqrt{3}m+\sqrt{2})(1-t)^2x$$
$$+\frac{1}{9}(\sqrt{3}m+\sqrt{2})^2(1-t)^2-t^2(1-t)^2=0$$

この直線は曲線 C に接するから，

$$\frac{D}{4}=\frac{m^2}{9}(\sqrt{3}m+\sqrt{2})^2(1-t)^4-\{m^2(1-t)^2+t^2\}\left\{\frac{1}{9}(\sqrt{3}m+\sqrt{2})^2-t^2\right\}(1-t)^2$$
$$=0$$
$$\iff m^2(\sqrt{3}m+\sqrt{2})^2(1-t)^2-\{(1-t)^2m^2+t^2\}(3m^2+2\sqrt{6}m+2-9t^2)=0$$
$$\iff (9t^2-18t+6)m^2-2\sqrt{6}m+9t^2-2=0\quad\cdots\cdots①$$

①の異なる2実解を m_1, m_2 とすると，解と係数の関係より，

$$m_1m_2=\frac{9t^2-2}{9t^2-18t+6}=-1$$
$$\iff 9t^2-2=-9t^2+18t-6$$
$$\iff 9t^2-9t+2=0$$
$$\iff (3t-1)(3t-2)=0\quad \therefore\ \underline{t=\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\ (0<t<1 を満たす)}\quad (答)$$

第３問

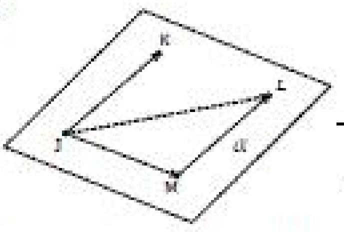
(1) (i)　3 点 J, K, M を通る平面を α とする.

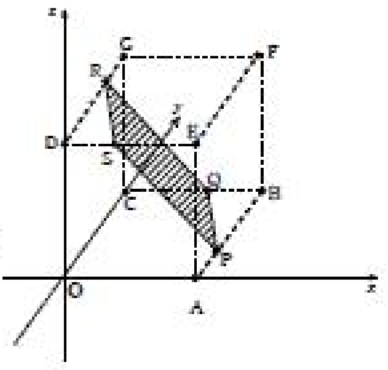
ここで, $\overrightarrow{JK}$ と $\overrightarrow{JM}$ は1次独立と考えてよい.

$$\overrightarrow{JL}=\overrightarrow{JM}+\overrightarrow{ML}$$

$\overrightarrow{JK}=\overrightarrow{ML}$ より,

$$\overrightarrow{JL}=\overrightarrow{JM}+\overrightarrow{JK}$$





これより, 点 L は平面 α 上と考えてよく, 4 点 J, K, M, L は同一平面上にある.

(ii)　P $(4n,\ p,\ 0)$ (ただし, $0\leqq p\leqq 4n$) に対し, Q $(q,\ 4n,\ 0)$, R $(0,\ r,\ 4n)$, S $(s,\ 0,\ 4n)$ とおく.

四角形PQRS はひし形より, $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$

$$\begin{cases} q-4n=-s \\ 4n-p=r \end{cases} \quad \cdots\cdots ①$$

かつ, $\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2=\left|\overrightarrow{PS}\right|^2$ だから,

$$(q-4n)^2+(4n-p)^2=(s-4n)^2+p^2+16n^2$$

①より,

$$p+q=2n \quad \cdots\cdots ②$$

以上①, ②より, $\begin{cases} p+q=2n \\ q+s=4n \\ p+r=4n \end{cases}$ となり, $\begin{cases} \mathrm{Q}\ (2n-p,\ 4n,\ 0) \\ \mathrm{R}\ (0,\ 4n-p,\ 4n) \\ \mathrm{S}\ (2n+p,\ 0,\ 4n) \end{cases}$ ……(答)

(2)　$\overrightarrow{PQ}=(-2n-p,\ 4n-p,\ 0)$, $\overrightarrow{PS}=(-2n+p,\ -p,\ 4n)$

ここで,

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2=\left|\overrightarrow{PS}\right|^2=4n^2+4np+p^2+16n^2-8np+p^2$$
$$=2p^2-4np+20n^2$$

さらに,

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PS}=4n^2-p^2-4np+p^2$$
$$=4n^2-4np$$

四角形PQRS の面積を $T(p)$ とおく.

$$T(p)=\sqrt{\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2\left|\overrightarrow{PS}\right|^2-\left(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PS}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\left(2p^2-4np+20n^2\right)^2-\left(4n^2-4np\right)^2}$$
$$=2\sqrt{p^4-4np^3+20n^2p^2-32n^3p+96n^4}\quad (0\leqq p\leqq 4n)$$

ここで,

$$f(p)=p^4-4np^3+20n^2p^2-32n^3p+96n^4\quad (0\leqq p\leqq 4n) \text{ とおく.}$$
$$f'(p)=4p^3-12np^2+40n^2p-32n^3$$
$$=4(p-n)(p^2-2np+8n^2)$$

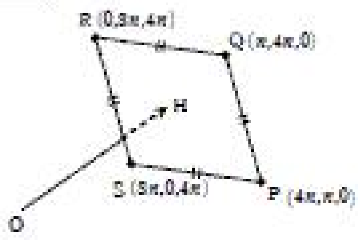
増減表を描くと次の通り.

p	0	…	n	…	$4n$
$f'(p)$		−	0	+	
$f(p)$		↘	(最小)	↗	

$p=n$ にて, $f(p)$ は最小, つまり, $T(p)$ は最小となる.

これより, P $(4n,\ n,\ 0)$, Q $(n,\ 4n,\ 0)$, R $(0,\ 3n,\ 4n)$, S $(3n,\ 0,\ 4n)$ ……(答)

(3)



$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OP}+\alpha\overrightarrow{PQ}+\beta\overrightarrow{PS}\quad (\alpha,\ \beta \text{ は実数})$$
$$=(4n,\ n,\ 0)+\alpha(-3n,\ 3n,\ 0)+\beta(-n,\ -n,\ 4n)$$
$$=(4n-3\alpha n-\beta n,\ n+3\alpha n-\beta n,\ 4\beta n)$$

ここで, $\overrightarrow{PQ}\ /\!/(-1,\ 1,\ 0)$, $\overrightarrow{PS}\ /\!/(-1,\ -1,\ 4)$ より,

$$\begin{cases} \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{PQ}=0 \\ \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{PS}=0 \end{cases} \iff \begin{cases} -4n+3\alpha n+\beta n+n+3\alpha n-\beta n=0 \\ -4n+3\alpha n+\beta n-n-3\alpha n+\beta n+16\beta n=0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \alpha=\dfrac{1}{2} \\ \beta=\dfrac{5}{18} \end{cases}$$

これより,

$$\overrightarrow{OH}=\left(\frac{20}{9}n,\ \frac{20}{9}n,\ \frac{10}{9}n\right)=\frac{10n}{9}(2,\ 2,\ 1)$$

$$\left|\overrightarrow{OH}\right|=\frac{10n}{9}\cdot\sqrt{4+4+1}=\frac{10n}{3}\ (\text{高さ})$$

ここで, $\left|\overrightarrow{OR}\right|=\left|\overrightarrow{OS}\right|>\left|\overrightarrow{OP}\right|=\left|\overrightarrow{OQ}\right|$ より, 底円の中心 H$\left(\dfrac{20n}{9},\ \dfrac{20n}{9},\ \dfrac{10n}{9}\right)$ から最も遠い点は R または S と分かる.

次に, HR $=r$ とおくと,

$$r=\sqrt{\left|\overrightarrow{OR}\right|^2-\left|\overrightarrow{OH}\right|^2}=\sqrt{25n^2-\frac{100}{9}n^2}=\sqrt{\frac{125}{9}n^2}$$

以上より, 求める円錐の体積を $V(n)$ とすると,

$$V(n)=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot\left|\overrightarrow{OH}\right|=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{125}{9}n^2\cdot\frac{10n}{3}$$
$$=\frac{1250}{81}\pi n^3 \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(4)

$$a_k=\left(\frac{10k}{3}\right)^2\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{V(k+i)}$$
$$=\frac{100}{9}k^2\sum_{i=1}^{k}\frac{81}{1250\pi(k+i)^3}$$
$$=\frac{18}{25\pi}\cdot\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\left(1+\dfrac{i}{k}\right)^3}$$

$$\therefore \lim_{k\to\infty}a_k=\frac{18}{25\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^3}=\frac{18}{25\pi}\int_0^1\frac{1}{(1+x)^3}dx$$
$$=\frac{18}{25\pi}\left[-\frac{1}{2(1+x)^2}\right]_0^1=\frac{18}{25\pi}\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{27}{100\pi} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$