

数 学

1. 監督者の指示があるまで開いてはいけない。
2. 解答は別紙の解答用紙に記入しなさい。
3. 問題用紙は各科目の試験終了後持ち帰ってもよい。
ただし、試験途中では持ち出してはいけない。

1.

(A). 次の にあてはまる答えを解答欄に記入せよ。

(1) $\angle A$ が直角、辺 BC の長さが 1 の直角二等辺三角形 ABC がある。 BC 上に、頂点と異なる 2 点 P, Q を $\angle BAP = \angle PAQ = \angle QAC$ をみたすようにとると、 PQ の長さの値は (ア) である。

(2) n を 2 以上の自然数とする。 n 個のさいころを同時に投げて、出た目の最大値を X 、最小値を Y とする。 $n = 3$ のとき、 $X = 3$ かつ $Y = 2$ となる確率は (イ) である。

一般の n に対し、 $X - Y = 1$ となる確率を n を用いて表すと (ウ) である。

(3) 3 次方程式 $x^3 + ax^2 + (2 + \sqrt{2})x + b = 0$ の 1 つの解が $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}i}{2}$ であるとき、実数の定数 a, b の値を求めると $a =$ (エ) , $b =$ (オ) である。ただし、 i は虚数単位とする。また、この方程式の他の 2 つの解を α, β とし、 $\alpha^{10} + \beta^{10}$ の値を求めると、 $\alpha^{10} + \beta^{10} =$ (カ) である。

(B). 次の命題 ①, ② が成り立つことを解答欄に証明せよ。

$2n, 2n + 1$ (n は整数) と表される整数を、順に偶数、奇数という。

集合 A を $A = \{a^2 - b^2 \mid a, b \text{ は整数}\}$ と定める。

命題 ① 「すべての奇数は A の要素である」

m を偶数とする。

命題 ② 「 m が 4 の倍数であることは、 m が A の要素であるための必要十分条件である」

2. t は $0 < t < 1$ をみたす定数とする。 xy 平面上に長さが1の線分 PQ がある。点 P は x 軸上を動き、点 Q は y 軸上を動くとき、線分 PQ を $t:1-t$ に内分する点の軌跡を C とする。

このとき、次の問いに答えよ。

(1) 曲線 C の方程式を t を用いて表せ。

(2) 点 $A(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3})$ から C にひいた2本の接線が直交するような t の値を求めたい。

(i) 条件をみたす2本の接線の一方が直線 $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ となることはない。
その理由を述べよ。

(ii) t の値を求めよ。

3. n を正の整数の定数とする。座標空間内の 8 点 $O(0, 0, 0)$, $A(4n, 0, 0)$, $B(4n, 4n, 0)$, $C(0, 4n, 0)$, $D(0, 0, 4n)$, $E(4n, 0, 4n)$, $F(4n, 4n, 4n)$, $G(0, 4n, 4n)$ を頂点とする立方体 $OABC-DEFG$ の辺 AB , BC , DG , DE 上に、それぞれ動点 P , Q , R , S がある。この 4 点 P , Q , R , S は、同一平面上にあり、さらに四角形 $PQRS$ がひし形になるように、いろいろと動く。

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) (i) 一般に、座標空間内の同一直線上にない異なる 4 点 J, K, L, M について、 $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{ML}$ が成り立つならば J, K, L, M は同一平面上にある。その理由を述べよ。
- (ii) 点 P の座標を $(4n, p, 0)$ (ただし $0 \leq p \leq 4n$) とする。四角形 $PQRS$ がひし形であるときの Q, R, S の座標を n と p を用いて表せ。
- (2) 四角形 $PQRS$ の面積を最小にするような P, Q, R, S の座標を n を用いて表せ。
- (3) (2) で求めた P, Q, R, S を考える。 O から 4 点 P, Q, R, S を通る平面に垂線をひき、交点を H とする。頂点を O , 底面を四角形 $PQRS$ とする四角錐 $O-PQRS$ を垂線 OH のまわりに 1 回転してできる立体の体積 $V(n)$ を n を用いて表せ。
- (4) (3) で求めた n の関数 $V(n)$ を用いた数列

$$a_k = \left(\frac{10k}{3}\right)^2 \left\{ \frac{1}{V(k+1)} + \frac{1}{V(k+2)} + \cdots + \frac{1}{V(k+k)} \right\}$$

($k = 1, 2, 3 \dots$)

の極限值 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k$ を求めよ。