1.

(1) $6x^2-(16a+7)x+(2a+1)(5a+2)<0$

$\iff \{3x-(5a+2)\}\{2x-(2a+1)\}<0$

$\therefore a+\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{5}{3}a+\dfrac{2}{3}$

これを満たす整数解 $x$ は,

$x=a+1,\ a+2,\ \cdots\cdots,\ a+10$

これより, $a+10<\dfrac{5}{3}a+\dfrac{2}{3}\leqq a+11$ と評価できる.

$3a+30<5a+2\leqq 3a+33$

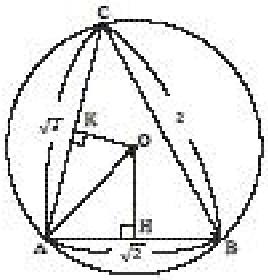
$\iff 14<a\leqq 15.5$

これを満たす自然数 $a$ は15である. $\therefore$ $\underline{a=\boxed{(ア)}=15}$ …… (答)

(2) $\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=\left|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right|^2$

$=3+2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=4$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}$




外心 O から辺 AB, 辺 AC に下ろした垂線の足を H, K とする.

$\overrightarrow{OH}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\left(s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}\right)=\left(\dfrac{1}{2}-s\right)\overrightarrow{AB}-t\overrightarrow{AC}$

ここで, $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=2\left(\dfrac{1}{2}-s\right)-\dfrac{1}{2}t=0$ より,

$2s+\dfrac{1}{2}t=1$ …… ①

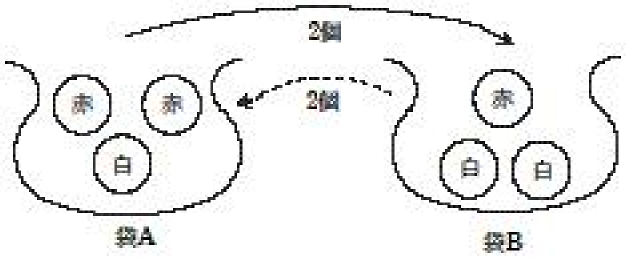
$\overrightarrow{OK}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\left(s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}\right)=\left(\dfrac{1}{2}-t\right)\overrightarrow{AC}-s\overrightarrow{AB}$

ここで, $\overrightarrow{OK}\cdot\overrightarrow{AC}=3\left(\dfrac{1}{2}-t\right)-\dfrac{1}{2}s=0$ より,

$\dfrac{1}{2}s+3t=\dfrac{3}{2}$ …… ②

以上①, ②より, $\underline{s=\boxed{(イ)}=\dfrac{9}{23},\ t=\boxed{(ウ)}=\dfrac{10}{23}}$ …… (答)

(3)




$P(X=0)=\dfrac{{}_2C_1\cdot{}_1C_1}{{}_3C_2}\cdot\dfrac{{}_2C_2}{{}_5C_2}$

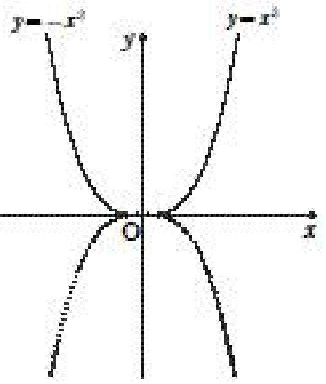
$=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{10}=\dfrac{1}{15}$ $\therefore$ $\underline{\boxed{(エ)}=\dfrac{1}{15}}$ …… (答)

$P(X=2)=\dfrac{{}_2C_2}{{}_3C_2}\cdot\dfrac{{}_2C_1\cdot{}_3C_1}{{}_5C_2}+\dfrac{{}_2C_1\cdot{}_1C_1}{{}_3C_2}\cdot\dfrac{{}_3C_2}{{}_5C_2}$

$=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{6}{10}+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{10}=\dfrac{2}{5}$ $\therefore$ $\underline{\boxed{(オ)}=\dfrac{2}{5}}$ …… (答)

(4) $f(x)=\left|x^3\right|=\begin{cases}x^3 & (x\geqq 0)\\ -x^3 & (x\leqq 0)\end{cases}$ より,

グラフが $x=0$ で切り替わっている.




$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to+0}\frac{x^3}{x}=0$ …… ①

$\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to-0}\frac{-x^3}{x}=0$ …… ②

①, ②より, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$ であるから,

$\underline{y=f(x)\text{ は } x=0 \text{ で微分可能である.}}$ …… (答)

2.

(1) $f(x)=e^x$ とすると，$f'(x)=e^x$

$\mathrm{P}(t,e^t)$ での接線を $l_t'$ とすれば，

$l_t' : y=e^t(x-t)+e^t$ より，

$l_t' : y=e^t x+e^t(1-t)$

$g(x)=-e^{1-x}+a$ とすると，$g'(x)=e^{1-x}$

$\mathrm{Q}(s,-e^{1-s}+a)$ での接線を $l_t''$ とすれば，

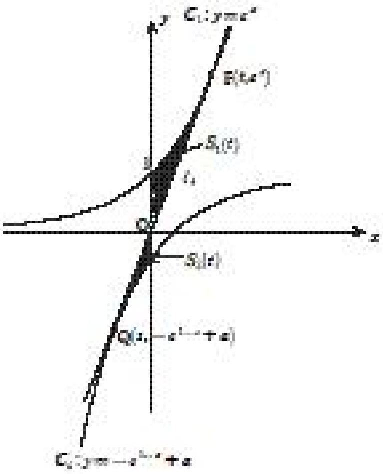
$l_t'' : y=e^{1-s}(x-s)-e^{1-s}+a$ より，

$l_t'' : y=e^{1-s}x-(s+1)e^{1-s}+a$

ここで，$l_t'$ と $l_t''$ が一致するので，

$$\begin{cases} e^t=e^{1-s} \\ e^t(1-t)=-(s+1)e^{1-s}+a \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t=1-s \\ a=e^t(1-t)+(s+1)e^{1-s} \end{cases} \qquad \therefore \underline{\begin{cases} s+t=1 \\ a=(3-2t)e^t \end{cases}} \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$




(2)(i) $S_1(t)=\int_0^t\{e^x-e^t x-e^t(1-t)\}dx$

$$=\left[e^x-\frac{e^t}{2}x^2-e^t(1-t)x\right]_0^t$$

$$=\left(\frac{t^2}{2}-t+1\right)e^t-1 \qquad \therefore \underline{S_1(t)=\left(\frac{t^2}{2}-t+1\right)e^t-1} \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$

$0<t\leqq 1$ のとき

$$S_2(t)=\int_0^{1-t}\{e^t x+e^t(1-t)+e^{1-x}-a\}dx$$

$$=\left[\frac{e^t}{2}x^2+e^t(1-t)x-e^{1-x}-(3-2t)e^t x\right]_0^{1-t}$$

$$=-\left(\frac{t^2}{2}-2t+\frac{5}{2}\right)e^t+e$$

$t\geqq 1$ のとき

$$S_2(t)=\int_{1-t}^0\{e^t x+e^t(1-t)+e^{1-x}-a\}dx$$

$$=-\int_0^{1-t}\{e^t x+e^t(1-t)+e^{1-x}-a\}dx$$

$$=\left(\frac{t^2}{2}-2t+\frac{5}{2}\right)e^t-e$$

よって，

$$\underline{S_2(t)=\begin{cases} -\left(\dfrac{t^2}{2}-2t+\dfrac{5}{2}\right)e^t+e & (0<t\leqq 1\text{ のとき}) \\ \left(\dfrac{t^2}{2}-2t+\dfrac{5}{2}\right)e^t-e & (t\geqq 1\text{ のとき}) \end{cases}} \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$

(ii)(i)を用いて，

$$S(t)=S_1(t)+S_2(t)=\begin{cases} \left(t-\dfrac{3}{2}\right)e^t+e-1 & (0<t\leqq 1\text{ のとき}) \\ \left(t^2-3t+\dfrac{7}{2}\right)e^t-e-1 & (t\geqq 1\text{ のとき}) \end{cases}$$

$0<t\leqq 1$ のとき

$$S'(t)=e^t+\left(t-\frac{3}{2}\right)e^t=\left(t-\frac{1}{2}\right)e^t$$

$t\geqq 1$ のとき

$$S'(t)=(2t-3)e^t+\left(t^2-3t+\frac{7}{2}\right)e^t=\left(t^2-t+\frac{1}{2}\right)e^t$$

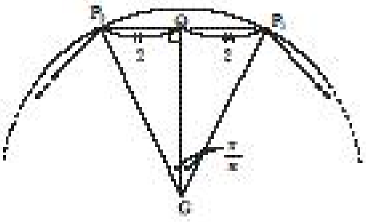
増減表を描くと以下の通り．

| $t$ | $(0)$ | $\cdots$ | $\frac{1}{2}$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $(\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $S(t)$ | | ↘ | (最小) | ↗ | | ↗ | |

増減表より，$t=\dfrac{1}{2}$ で $S(t)$ は最小となる．

$$(\text{最小値})=S\left(\frac{1}{2}\right)=\underline{e-\sqrt{e}-1} \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$

3.



(1) 右図のように, $P_1Q=P_2Q=2$

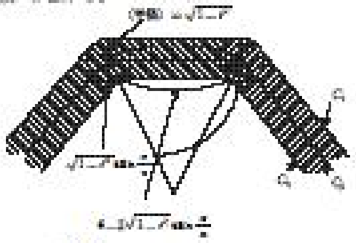
また, $\tan\frac{\pi}{n}$ は $n \geqq 3$ より, $0<\tan\frac{\pi}{n} \leqq \sqrt{3}$ である.

$\tan\frac{\pi}{n}=\frac{2}{GQ}$ , $\frac{2}{GQ} \leqq \sqrt{3} \Longleftrightarrow GQ \geqq \frac{2}{\sqrt{3}}\ (>1)$

よって, $\underline{GQ>1 は示された}$. (証明終)

(2) (i) $K_n$ を平面 $z=t\ (-1 \leqq t \leqq 1)$ で切ったときの図形は右下の図の通り.

ここで, 外枠から順に $C_1, C_2, C_3$ とおく.



$(C_1 と C_2 で囲まれる領域面積)=4n\sqrt{1-t^2}+\pi(1-t^2)$

ここで, 内側にある正 $n$ 角形の 1 辺の長さは

$4-2\sqrt{1-t^2}\tan\frac{\pi}{n}$ なので

$$(C_2 と C_3 で囲まれる領域面積)=\frac{4n}{\tan\frac{\pi}{n}}\left\{1-\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{1-t^2}\tan\frac{\pi}{n}\right)^2\right\}$$

$$S(t)=4n\sqrt{1-t^2}+\pi(1-t^2)+4n\cdot\frac{\sqrt{1-t^2}\tan\frac{\pi}{n}-\frac{1}{4}(1-t^2)\tan^2\frac{\pi}{n}}{\tan\frac{\pi}{n}}$$

$$=4n\sqrt{1-t^2}+\pi(1-t^2)+4n\sqrt{1-t^2}-n\tan\frac{\pi}{n}(1-t^2)$$

$$=\underline{8n\sqrt{1-t^2}+\pi(1-t^2)-n\tan\frac{\pi}{n}(1-t^2)\quad(-1 \leqq t \leqq 1)} \quad \cdots\cdots (答)$$

(ii) $$V(n)=\int_{-1}^{1}S(t)dt=8n\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt+\pi\int_{-1}^{1}(1-t^2)dt-n\tan\frac{\pi}{n}\int_{-1}^{1}(1-t^2)dt$$

$$=8n\cdot\frac{\pi\cdot 1^2}{2}+2\pi\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_0^1-2n\tan\frac{\pi}{n}\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_0^1$$

$$=\underline{4n\pi+\frac{4}{3}\pi-\frac{4}{3}n\tan\frac{\pi}{n}} \quad \cdots\cdots (答)$$

(3) $K_n$ を平面 $z=t\ (-1 \leqq t \leqq 1)$ で切ったときの最長距離を $L$, 最短距離を $l$ とする.

$$L=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{n}}+\sqrt{1-t^2},\ l=\frac{2}{\tan\frac{\pi}{n}}-\sqrt{1-t^2}$$

立体の $z=t\ (-1 \leqq t \leqq 1)$ での切り口は, 2つの大・小の半径に囲まれた円環領域となる.

その面積を $T(x)$ とおくと,

$$T(t)=\pi(L^2-l^2)=\pi\left(\frac{4}{\sin^2\frac{\pi}{n}}+\frac{4\sqrt{1-t^2}}{\sin\frac{\pi}{n}}-\frac{4}{\tan^2\frac{\pi}{n}}+\frac{4\sqrt{1-t^2}}{\tan\frac{\pi}{n}}\right)$$

$$=4\pi\left\{1+\frac{\sqrt{1-t^2}\left(1+\cos\frac{\pi}{n}\right)}{\sin\frac{\pi}{n}}\right\}$$

$$W(n)=\int_{-1}^{1}T(t)dt=4\pi\cdot 2+4\pi\cdot\frac{1+\cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}\cdot\frac{\pi\cdot 1^2}{2}$$

$$=\underline{8\pi+2\pi^2\cdot\frac{1+\cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}} \quad \cdots\cdots (答)$$

(4) $$\lim_{n\to\infty}\frac{V(n)}{W(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n\pi+\frac{4}{3}\pi-\frac{4}{3}n\tan\frac{\pi}{n}}{8\pi+2\pi^2\cdot\frac{1+\cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n\pi+\frac{4}{3}\pi-\frac{4}{3}\cdot\frac{\tan\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\cdot\pi}{8\pi+2\pi^2\cdot\left(1+\cos\frac{\pi}{n}\right)\cdot\frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}\cdot\frac{n}{\pi}}=\underline{1} \quad \cdots\cdots (答)$$