1

(1) P(2 個のさいころの目の積が偶)$=\dfrac{3}{4}$ ← $+2$ 移動

P(2 個のさいころの目の積が奇)$=\dfrac{1}{4}$ ← $+1$ 移動

$$P(x_1=2)=\frac{3}{4} \qquad \therefore\ ア=\frac{3}{4} \quad (答)$$

$$P(x_3=3\text{ かつ }x_4=5)=\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{256} \qquad \therefore\ イ=\frac{3}{256} \quad (答)$$

座標 4 以上の点に初めて到達する試行回数とその確率は以下の通り.

試行回数	2	3	4
P	$\frac{9}{16}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{1}{64}$

$$E=2\cdot\frac{9}{16}+3\cdot\frac{27}{64}+4\cdot\frac{1}{64}$$
$$=\frac{72+81+4}{64}$$
$$=\frac{157}{64} \qquad \therefore\ ウ=\frac{157}{64} \quad (答)$$

(2)
$$\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|^2=1 \iff 2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\left|\overrightarrow{OB}\right|^2=0\cdots① \quad \left(\because\ \left|\overrightarrow{OA}\right|=1\right)$$
$$\left|2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|^2=1 \iff 4\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\left|\overrightarrow{OB}\right|^2=-3\cdots② \quad \left(\because\ \left|\overrightarrow{OA}\right|=1\right)$$

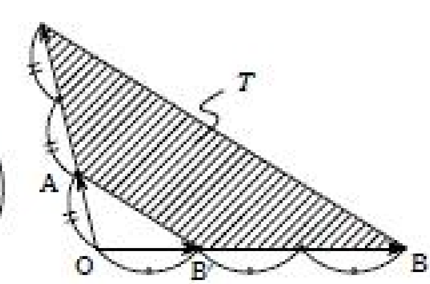
①, ②より, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-\dfrac{3}{2}$ となり,

$$\left|\overrightarrow{OB}\right|=\sqrt{3} \qquad \therefore\ エ=\sqrt{3} \quad (答)$$

$$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=s\overrightarrow{OA}+3t\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right)}_{\overrightarrow{OB'}}=s\overrightarrow{OA}+3t\overrightarrow{OB'}$$

$$T=\frac{1}{2}\sqrt{\left|3\overrightarrow{OA}\right|^2\left|\overrightarrow{OB}\right|^2-\left(3\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\right)^2}\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)$$
$$=\frac{4}{9}\sqrt{9\cdot3-9\cdot\frac{9}{4}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\left(\begin{array}{l}1\leqq s+3t\leqq 3\\ s\geqq 0\\ 3t\geqq 0\end{array}\right)$$



$$\therefore\ オ=\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (答)$$

(1) $C_1 : f(x) = 2x\sqrt{1-x^2}\,(-1 \leqq x \leqq 1)$ ……原点対称の奇関数

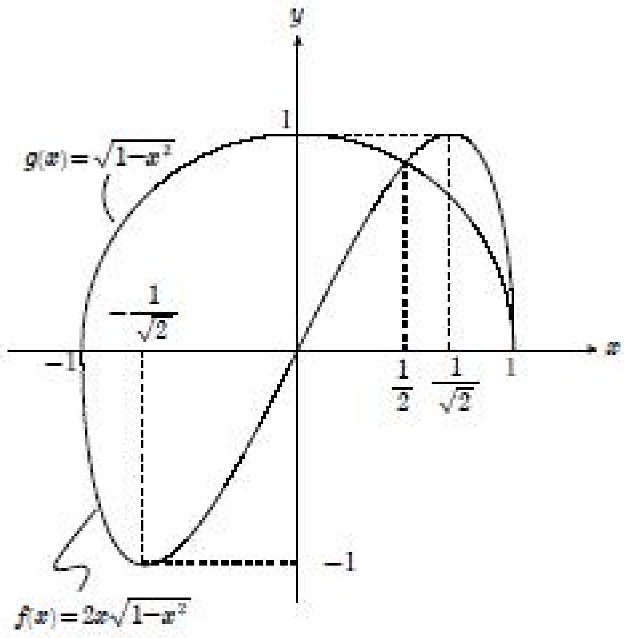
$C_2 : g(x) = \sqrt{1-x^2}\,(-1 \leqq x \leqq 1)$ …… $x^2+y^2=1$ の $y \geqq 0$ 部分（半円）

$$f'(x) = 2\sqrt{1-x^2} + 2x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \frac{2(1-x^2)-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	-1	↗	1	↘	0
			極小		極大		

(極大値) $= f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$

(極小値) $= f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1$



C_2 は円：$x^2+y^2=1$ の $y \geqq 0$ 部分を表す半円 $\left(y=\sqrt{1-x^2}\right)$

次に，

$$2x\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x^2}$$

$\iff \sqrt{1-x^2}\,(2x-1)=0$ 　　$\therefore\ x = \pm 1, \frac{1}{2}$

$P_1\left(t,\ 2t\sqrt{1-t^2}\right)$，$P_2\left(t,\ t\sqrt{1-t^2}\right)$ （ただし，$-1<t<1$）より，

$P_1 \equiv P_2$ となる t の値は 　　$t = \frac{1}{2}$ 　（答）

(2) $f'(x) = \frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$ より，

$$(\ l_t \text{ の傾き}) = f'(t) = \frac{2(1-2t^2)}{\sqrt{1-t^2}} \quad (-1<t<1)$$

$g'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ より，

$$(\ m_t \text{ の傾き}) = g'(t) = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \quad (-1<t<1)$$

$$l_t \,/\!/\, m_t \iff \frac{2(1-2t^2)}{\sqrt{1-t^2}} = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$$
$$\iff 4t^2-t-2=0 \quad \text{（答）}$$

$\therefore\ t = \frac{1\pm\sqrt{33}}{8}$ 　　$\therefore\ \alpha = \frac{1-\sqrt{33}}{8}$，$\beta = \frac{1+\sqrt{33}}{8}$ 　（答）

(3) (i)

$$l_t : y = \frac{2(1-2t^2)}{\sqrt{1-t^2}}(x-t) + 2t\sqrt{1-t^2}$$
$$m_t : y = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}(x-t) + \sqrt{1-t^2}$$

2 式より x を消去して

$$y = y_t = \frac{2(t^2-1)\sqrt{1-t^2}}{4t^2-t-2} \quad (-1<t<1) \quad \text{（答）}$$

(ii) $y_t = \frac{-2(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}{4t^2-t-2} > 0$ とおく．

つまり，

$4t^2-t-2<0$ 　　$\therefore\ \underset{\left(\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)}{\underset{\|}{\alpha}} < t < \underset{\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)}{\underset{\|}{\beta}}$ 　（答）

$$y_t' = \frac{-3\sqrt{1-t^2}\cdot(-2t)\cdot(4t^2-t-2) + 2(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\cdot(8t-1)}{(4t^2-t-2)^2}$$
$$= \frac{2\sqrt{1-t^2}\,(2t^2+1)(2t-1)}{(4t^2-t-2)^2}$$

t	(α)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(β)
y_t'		$-$	0	$+$	
y_t		↘	（最小）	↗	

増減表より，

$$(y_t \text{ の最小値}) = y_{\frac{1}{2}} = \frac{-2\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{4\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{（答）}$$

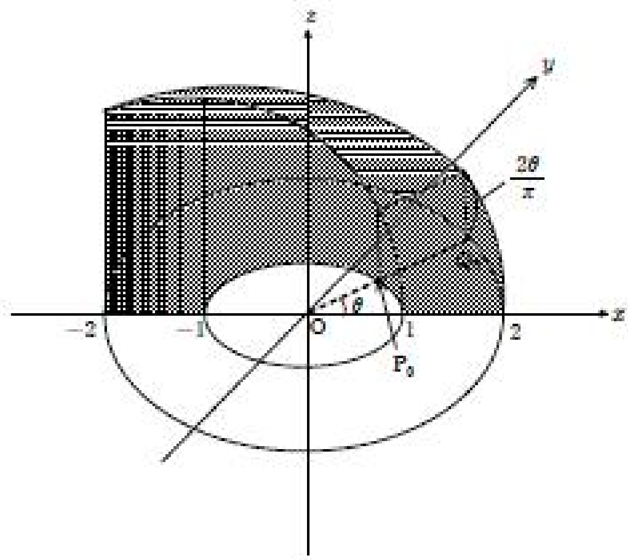
3

(1) $x^2+y^2+z^2 \leqq 4$ に $z=t$ 代入

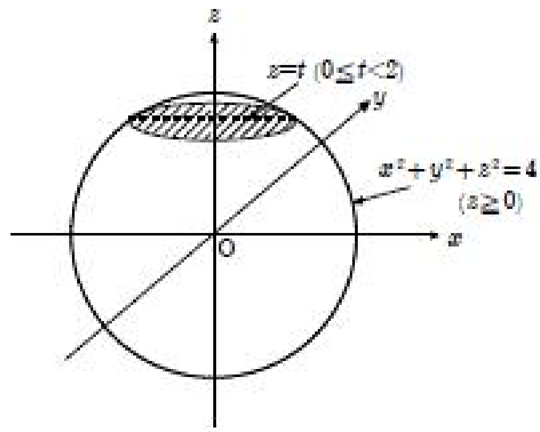
$$x^2+y^2 \leqq 4-t^2$$
$$=\left(\sqrt{4-t^2}\right)^2$$

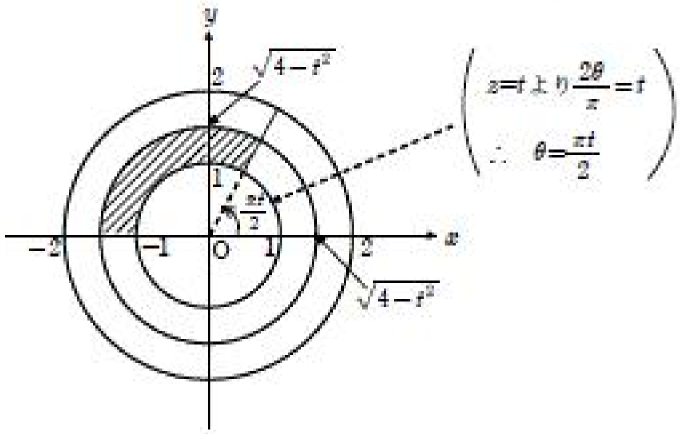
半径 $\sqrt{4-t^2}$ の円周および内部を示す.

$\therefore\ \sqrt{4-t^2}$ (答)



(2) 立体 K の $z=t\ \left(0 \leqq t < 2\right)$ 面での切り口と
(1) で求めた半径 $\sqrt{4-t^2}$ の円周および内部を
同時にみたす点を図示すると下図の通り.





上図の斜線部分の面積を $S(t)\ \left(0 \leqq t < 2\right)$ とすると,

$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{4-t^2}\right)^2\cdot\left(\pi-\frac{\pi t}{2}\right)-\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\left(\pi-\frac{\pi t}{2}\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(t^3-2t^2-3t+6\right) \quad \left(\begin{array}{l} S(t) \iff (t-2)(t^2-3) \geqq 0 \\ \qquad\ \ \iff t^2-3 \leqq 0\ \therefore\ 0 \leqq t \leqq \sqrt{3} \end{array}\right)$$

求める L の体積は

$$\int_0^{\sqrt{3}} S(t)\,dt=\frac{\pi}{4}\int_0^{\sqrt{3}}\left(t^3-2t^2-3t+6\right)dt$$

$$=\frac{\pi}{4}\left[\frac{t^4}{4}-\frac{2}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+6t\right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$=\left(\sqrt{3}-\frac{9}{16}\right)\pi$$

(答)

(1)　(ｱ) $l: x=0$ のとき

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ dt \end{pmatrix} \quad (t \text{は任意の実数})$$

$ad \neq 0$ より，$d \neq 0$　　これより，$(x',\ y')$ は $y=0$ とならず不適.

(ｲ) $l: y = mx$ （m：実数）のとき

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ mt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-m)t \\ dmt \end{pmatrix} \quad (t \text{は任意の実数})$$

$(x',\ y')$ は，$x'+my'=0$ をみたすから，

$$(a-m)t + m\cdot dmt = 0$$

$$\Longleftrightarrow (a-m+dm^2)t = 0$$

t は任意の実数より，

$$a-m+dm^2=0 \quad (\Longleftrightarrow dm^2-m+a=0 \quad \cdots\cdots①)$$

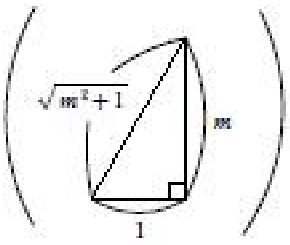
直線 l がただ 1 つ存在することから，①が重解をもてばよく，

$$D = 1^2 - 4da = 0 \qquad \therefore\ ad = \frac{1}{4} \quad \left(\text{重解 } m = \frac{1}{2d}\right)$$

以上 (ｱ)，(ｲ) より，

$$ad = \frac{1}{4}$$　（答）

(2)　$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{\sqrt{m^2+1}},\ \dfrac{m}{\sqrt{m^2+1}}\right)$ の像は



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4d} & -1 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{m^2+1}} \\ \frac{m}{\sqrt{m^2+1}} \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \mathrm{Q} = \left(\frac{\frac{1}{4d}-m}{\sqrt{m^2+1}},\ \frac{dm}{\sqrt{m^2+1}}\right)$$

$\|$　　$m = \dfrac{1}{2d}$ だから

$$\therefore\ \mathrm{Q} = \left(-\frac{1}{2\sqrt{4d^2+1}},\ \frac{d}{\sqrt{4d^2+1}}\right)$$

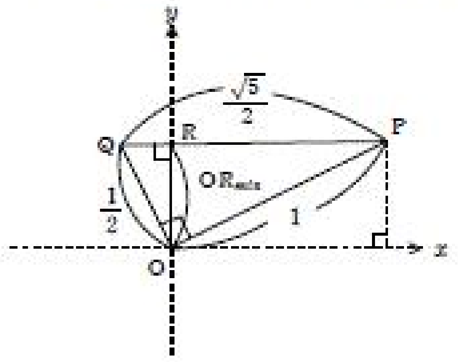
これより，

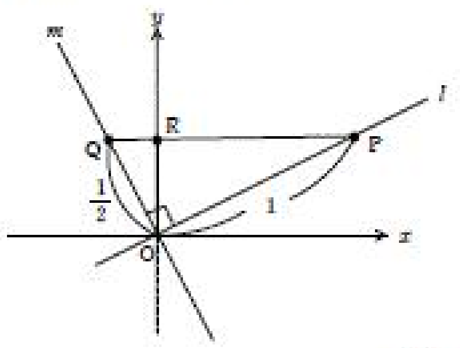
$$\mathrm{OQ}^2 = \left(-\frac{1}{2\sqrt{4d^2+1}}\right)^2 + \left(\frac{d}{\sqrt{4d^2+1}}\right)^2 = \frac{1}{4} \qquad \therefore\ \mathrm{OQ} = \frac{1}{2}$$　（答）

ここで，$\mathrm{Q}_y = \dfrac{d}{\sqrt{4d^2+1}} > 0$ より，

$\mathrm{Q}\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{4d^2+1}},\ \dfrac{d}{\sqrt{4d^2+1}}\right)$ は，第 2 象限に存在する.

OR の長さが最小となるのは，$\mathrm{OR} \perp \mathrm{PQ}$ のときである.





$$(\text{OP の傾き}) = \frac{1}{2} \qquad \therefore\ m = \frac{1}{2} = \frac{1}{2d} \qquad \therefore \begin{cases} a = \dfrac{1}{4} \\ d = 1 \end{cases}$$　（答）