1

(1) 3枚のカードを取り出す組みは　${}_{10}C_3=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}=120$（通り）

$$(X,\ Y)=\underset{0\text{通り}}{(1,\ 2)},\ \underset{1\text{通り}}{(2,\ 4)},\ \underset{2\text{通り}}{(3,\ 6)},\ \underset{3\text{通り}}{(4,\ 8)},\ \underset{4\text{通り}}{(5,\ 10)}$$

全部で，$1+2+3+4=10$（通り）

$$\therefore\ P(Y=2X)=\frac{10}{120}=\overset{(ア)}{\boxed{\frac{1}{12}}}$$　（答）

$Y<2X$ となるのは，$1+3+6+6+3+1=20$（通り）

$$\therefore\ P(Y<2X)=\frac{20}{120}=\overset{(イ)}{\boxed{\frac{1}{6}}}$$　（答）

(2) $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$　（$a,\ b,\ c,\ d$ は実数）とおく．

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-b \\ c-d \end{pmatrix}\ \therefore\ \mathrm{Q}(a-b,\ c-d)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-b \\ c-d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\quad\cdots\cdots①$$

①より，

$$\begin{cases} a(a-b)+b(c-d)=-1 \\ c(a-b)+d(c-d)=0 \end{cases}\quad\cdots\cdots②$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\quad\cdots\cdots③$$

③より，

$$\begin{cases} -a=1 \\ -c=-1 \end{cases}\quad\cdots\cdots④$$

②，④より，

$$\begin{cases} a=-1 \\ c=1 \\ b(2-d)=-2 \\ b=d-d^2-1 \end{cases}$$

これより，

$$(d-d^2-1)(2-d)=-2$$

$$\Longleftrightarrow\quad d(\underset{\overset{\vee}{0}}{\underline{d^2-3d+3}})=0\qquad\therefore\ d=0,\ b=-1$$

$$\therefore\ A=\overset{(ウ)}{\boxed{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}}$$　（答）

さらに，

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より，$\mathrm{Q}\left(\overset{(エ)}{\boxed{0}},\ \overset{(オ)}{\boxed{1}}\right)$　（答）

2

(1) (i) $f(x)=\log\left(a^2+x^2\right)\ (x\geqq 0)$ より，

$$f'(x)=\frac{2x}{a^2+x^2}\ (x>0)$$

$$f''(x)=\frac{2(a^2+x^2)-2x\cdot 2x}{(a^2+x^2)^2}=\frac{2(a^2-x^2)}{(a^2+x^2)^2}$$

増減表を描くと次の通り．

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$	$(+\infty)$
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$2\log a$	↗	(変曲点)	↗	$(+\infty)$

$$\therefore\quad t(a)=a\ \left(0<a\leqq\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\qquad (答)$$

また，$g(x)=x^2+b$ が上記の変曲点 $\left(a,\ \log 2a^2\right)$ を通るから，

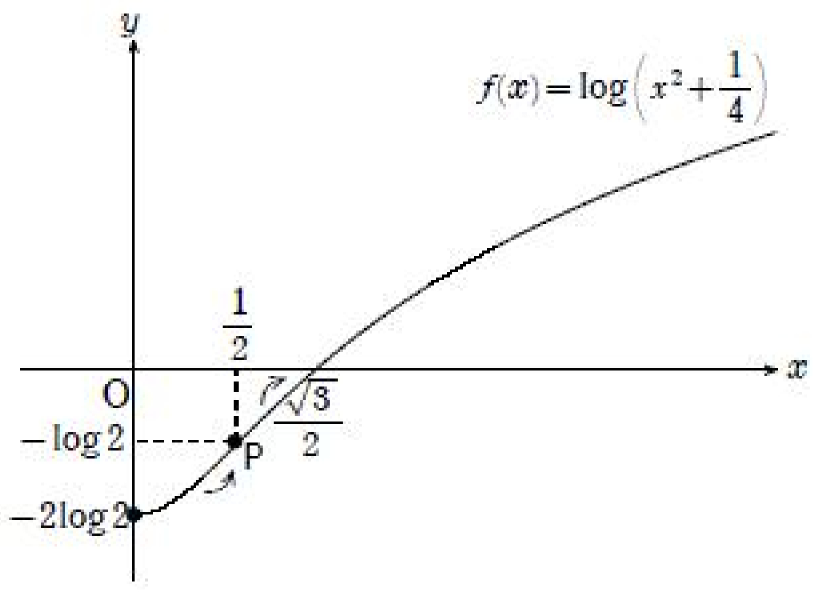
$$\log 2a^2=a^2+b \iff \underline{\underline{b=\log 2a^2-a^2}}\qquad (答)$$

(ii) $\left(a=\frac{1}{2}\text{ のとき}\right)\quad C_1: f(x)=\log\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\ (x\geqq 0)$

$$f(0)=\log\frac{1}{4}=-2\log 2\ \ (-1.4<-2\log 2<-1.2)$$

$$変曲点\left(\frac{1}{2},-\log 2\right)\ \ (-0.7<-\log 2<-0.6)$$

(i)の増減表を利用してグラフを描くと，次の通り．



(2)

$$F(x)=g(x)-f(x)=x^2+\log 2a^2-a^2-\log\left(a^2+x^2\right)\ \ (0\leqq x\leqq a)$$

とおく．

$$F'(x)=2x-\frac{2x}{a^2+x^2}=\frac{2x(a^2+x^2-1)}{a^2+x^2}\leqq 0\ \left(\because a^2+x^2-1\leqq 2a^2-1\leqq 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-1=0\right)$$

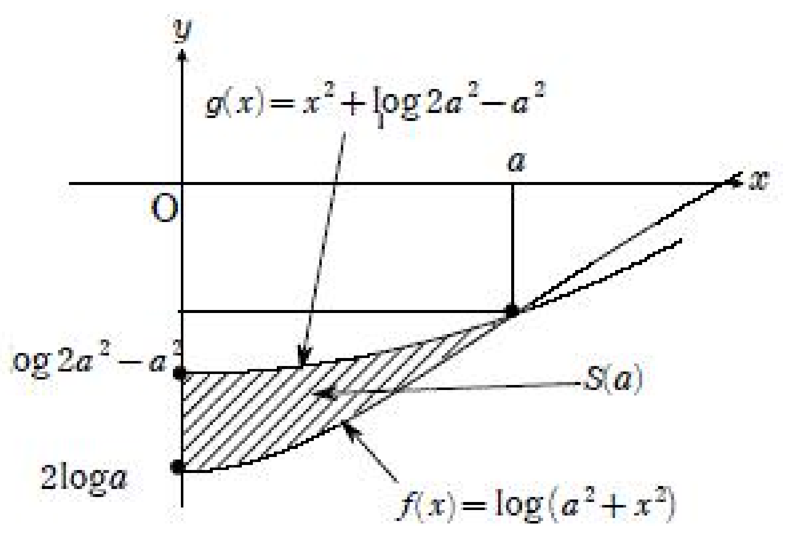
よって，$F(x)$ は x における単調減少

$$\therefore\ F(x)\geqq F(a)=0\ \ (F(x)\geqq 0)$$

$\therefore\ g(x)\geqq f(x)$　　($x=a$ のとき等号成立)　　　(答)

(3) (2)より，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ を図示すると下図の通り．

$$S(a)=\int_0^a\{g(x)-f(x)\}dx=\int_0^a\{x^2+\log 2a^2-a^2-\log(a^2+x^2)\}dx$$



ここで，

$$\int_0^a\log(a^2+x^2)dx$$
$$=\int_0^a(x)'\log(a^2+x^2)dx$$
$$=\left[x\log(a^2+x^2)\right]_0^a-\int_0^a x\cdot\frac{2x}{a^2+x^2}dx$$
$$=a\log 2a^2-\int_0^a\left(2-\frac{2a^2}{a^2+x^2}\right)dx\qquad x=a\tan\theta\ \therefore\ dx=\frac{a}{\cos^2\theta}d\theta$$
$$=a\log 2a^2-2a+2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{a^2(1+\tan^2\theta)}\cdot\frac{a}{\cos^2\theta}d\theta$$

x	$0\ \to\ a$
θ	$0\ \to\ \frac{\pi}{4}$

$$=a\log 2a^2-2a+2a\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore\ S(a)=-\frac{2}{3}a^3+\left(2-\frac{\pi}{2}\right)a\ \left(0<a\leqq\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\qquad (答)$$

ここで，

$$S'(a)=-2a^2+2-\frac{\pi}{2}$$

a	(0)	$\cdots$	$\frac{\sqrt{4-\pi}}{2}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	(最大)	↘	

増減表より，

$\underline{\underline{a=\frac{\sqrt{4-\pi}}{2}}}$　(答) のとき　$S(a)$ は最大となり，

$$(最大値)=S\left(\frac{\sqrt{4-\pi}}{2}\right)=\frac{1}{6}(4-\pi)^{\frac{3}{2}}\qquad (答)$$

3

(1)

$t=\sin x+\cos x$

$=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ とおくと，$\underline{\underline{-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}}}$

ここで，$t^2=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x$ より，

$2\sin x\cos x=t^2-1$

よって，

$$-\sqrt{2}a(\sin x+\cos x)+4b\sin x\cos x-4\leqq 0$$

$$\iff -\sqrt{2}at+2b(t^2-1)-4\leqq 0$$

$$\iff 2bt^2-\sqrt{2}at-2b-4\leqq 0 \quad \cdots\cdots ①$$

①が $-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ でつねに成立するよう考えればよい．

$f(t)=2bt^2-\sqrt{2}at-2b-4$ とおく．

(i) $b>0$ のとき

$$\begin{cases} f(-\sqrt{2})=2a+2b-4\leqq 0 \\ f(\sqrt{2})=2b-2a-4\leqq 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} b\leqq -a+2 \\ b\leqq a+2 \end{cases}$$

(ii) $b=0$ のとき

$f(t)=-\sqrt{2}at-4$ （t の高々1次式）

$$\begin{cases} f(-\sqrt{2})=2a-4\leqq 0 \\ f(\sqrt{2})=-2a-4\leqq 0 \end{cases} \quad \therefore\ -2\leqq a\leqq 2$$

(iii) $b<0$ のとき

$$f(t)=2b\left(t-\frac{\sqrt{2}a}{4b}\right)^2+\cdots\cdots$$

・$\dfrac{\sqrt{2}a}{4b}\leqq-\sqrt{2}$ $\left(b\geqq-\dfrac{1}{4}a\right)$ のとき

$f(-\sqrt{2})=2b+2a-4\leqq 0 \quad \therefore\ b\leqq -a+2$

・$-\sqrt{2}\leqq\dfrac{\sqrt{2}a}{4b}\leqq\sqrt{2}$ $\left(\begin{cases} b\leqq-\dfrac{1}{4}a \\ b\leqq\dfrac{1}{4}a \end{cases}\right)$ のとき

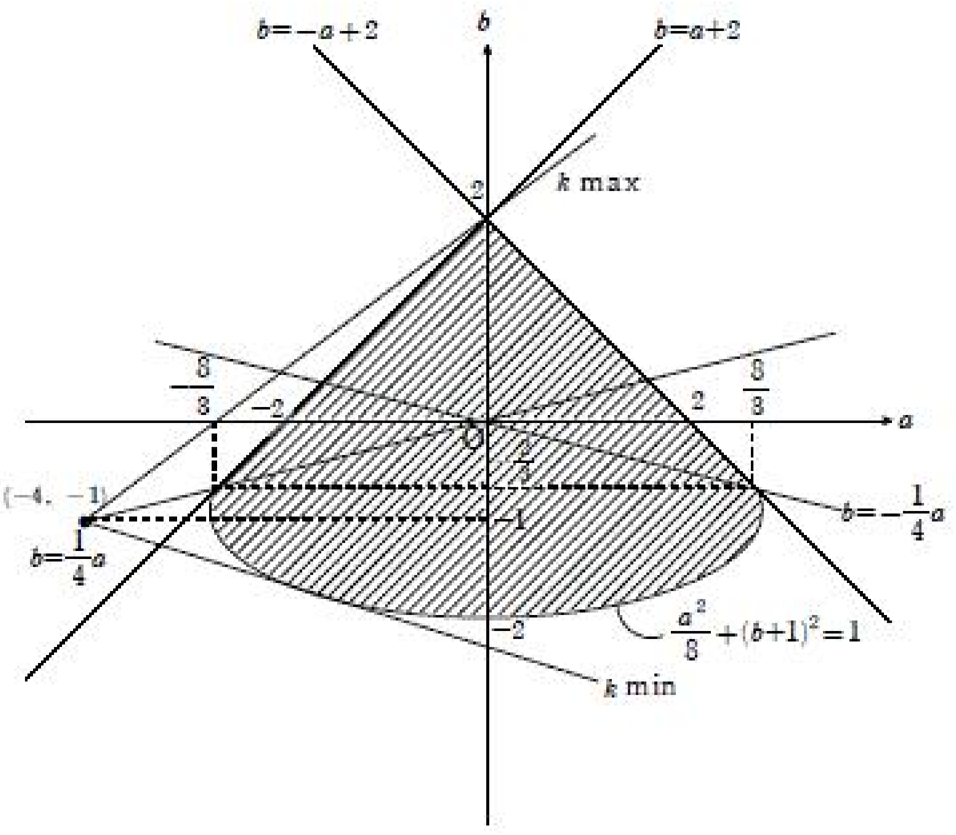
$\therefore\ \dfrac{a^2}{8}+(b+1)^2\leqq 1$

・$\sqrt{2}\leqq\dfrac{\sqrt{2}a}{4b}$ $\left(b\geqq\dfrac{1}{4}a\right)$ のとき

$f(\sqrt{2})=2b-2a-4\leqq 0 \quad \therefore\ b\leqq a+2$

以上(i)〜(iii)より，ab 平面に図示

右図の斜線部分（ただし，境界を含む）



(2)

$\dfrac{b+1}{a+4}=k$ （k：実数） とおく．

$b=k(a+4)-1 \quad \cdots\cdots ②$

②は点$(-4,\ -1)$を通り傾き k の直線と考えられるから，

・ k の最大値は$(a,\ b)=(0,\ 2)$を通るとき，$k=\dfrac{3}{4}$

・ k の最小値は楕円$\dfrac{a^2}{8}+(b+1)^2=1$ と $b=k(a+4)-1$ が接するとき

$$\frac{a^2}{8}+k^2(a+4)^2=1 \iff (8k^2+1)a^2+64k^2a+128k^2-8=0$$

ここで，

$$D/4=(32k^2)^2-(8k^2+1)(128k^2-8)=0$$

$$\iff -64k^2+8=0 \quad \therefore\ k=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

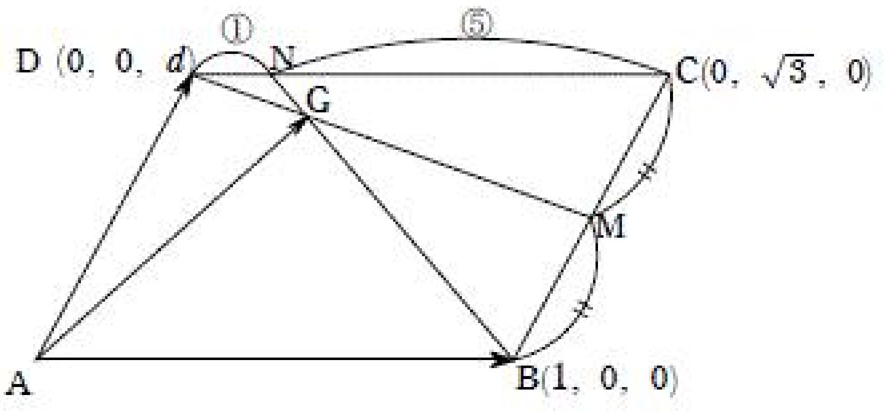
以上より，

$$-\frac{\sqrt{2}}{4}\leqq k\leqq\frac{3}{4}$$

$$\iff \overset{(カ)}{\boxed{-\frac{\sqrt{2}}{4}}}\leqq\frac{b+1}{a+4}\leqq\overset{(キ)}{\boxed{\frac{3}{4}}} \qquad （答）$$

4

(1)(i)



$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$$

より，実数 s, t を用いて，

$$\overrightarrow{AG}=(1-s)\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AN}$$

$$=(1-s)\overrightarrow{AB}+\frac{s}{6}\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AD}$$

$$=\left(1-\frac{5}{6}s\right)\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AD}\quad\cdots\cdots①$$

$$\overrightarrow{AG}=(1-t)\overrightarrow{AM}+t\overrightarrow{AD}$$

$$=(1-t)\overrightarrow{AB}+\frac{1-t}{2}\overrightarrow{AD}+t\overrightarrow{AD}$$

$$=(1-t)\overrightarrow{AB}+\frac{1+t}{2}\overrightarrow{AD}\quad\cdots\cdots②$$

$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AD}$ は1次独立より，①，②から，

$$\begin{cases}1-\dfrac{5}{6}s=1-t\\ s=\dfrac{1+t}{2}\end{cases}\qquad\therefore\ s=\frac{6}{7},\ t=\frac{5}{7}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{AG}=\overset{(ク)}{\boxed{\frac{2}{7}}}\overrightarrow{AB}+\overset{(ケ)}{\boxed{\frac{6}{7}}}\overrightarrow{AD}$$ （答）

(ii)

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ より，$A\left(1,-\sqrt{3},d\right)$ と表せる．

$$\overrightarrow{AD}=\left(-1,\sqrt{3},0\right),\ \left|\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{4}=2$$

$$\overrightarrow{AB}=\left(0,\sqrt{3},-d\right),\ \left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{d^2+3}$$

$$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{7}\left(0,\sqrt{3},-d\right)+\frac{6}{7}\left(-1,\sqrt{3},0\right)=-\frac{2}{7}\left(3,-4\sqrt{3},d\right)$$

$$\left|\overrightarrow{AG}\right|=\frac{2}{7}\sqrt{d^2+57}$$

ここで，

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AG}=\left|\overrightarrow{AD}\right|\left|\overrightarrow{AG}\right|\cos\frac{\pi}{6}$$

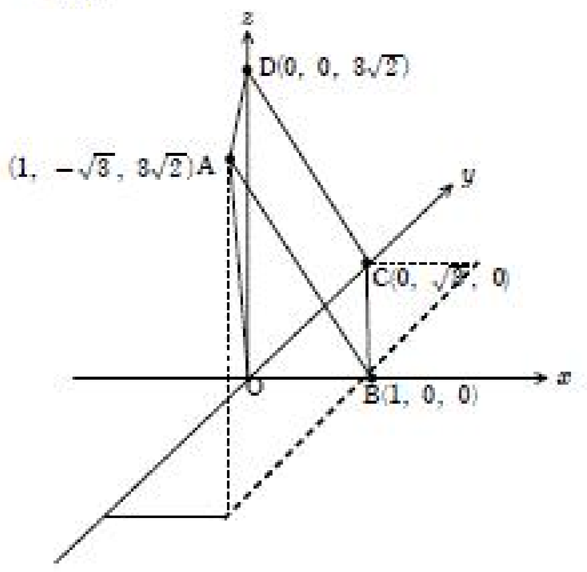
$$\iff\quad -\frac{2}{7}(-3-12)=2\cdot\frac{2}{7}\sqrt{d^2+57}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\iff\quad \sqrt{3}\sqrt{d^2+57}=15$$

$$\therefore\ d^2=18\qquad\therefore\ d=3\sqrt{2}\ \ (>0)$$

よって，$A\left(\overset{(コ)}{\boxed{1}},\overset{(サ)}{\boxed{-\sqrt{3}}},\overset{(シ)}{\boxed{3\sqrt{2}}}\right),\ d=\overset{(ス)}{\boxed{3\sqrt{2}}}$ （答）

(2)　xy 平面の原点Oからの距離を r，高さを先の空間図と同じ z を用いて考える．



・直線CDの z 軸回転は $z=-\sqrt{6}r+3\sqrt{2}$ の z 軸回転　$\left(r=\dfrac{3\sqrt{2}-z}{\sqrt{6}}\right)$

・直線ABの z 軸回転を調べる．

$$\overrightarrow{OP}=(x,y,z)=(1,0,0)+\frac{z}{3\sqrt{2}}\left(0,-\sqrt{3},3\sqrt{2}\right)$$

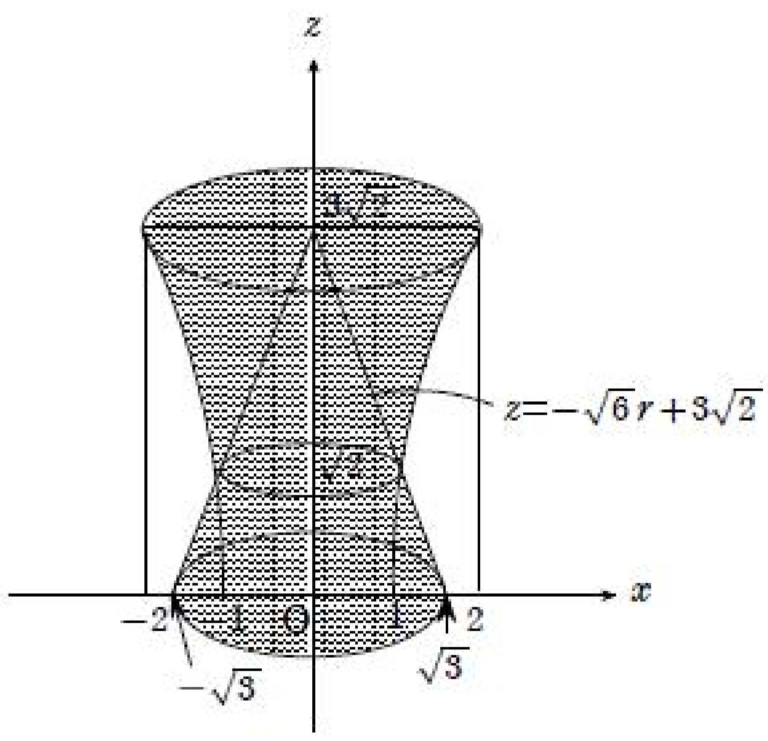
$$(半径R)^2=x^2+y^2=1^2+\left(-\frac{z}{\sqrt{6}}\right)^2=1+\frac{z^2}{6}$$

ここで，$R^2=r^2$

$$\iff\quad 1+\frac{z^2}{6}=\frac{1}{6}\left(18-6\sqrt{2}z+z^2\right)$$

$$\iff\quad 1=3-\sqrt{2}z\quad\therefore\ z=\sqrt{2}$$

求める立体の体積を V とすると，



$$V=\pi\left(\sqrt{3}\right)^2\cdot3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{8}{27}\right)$$

$$+\pi\int_{\sqrt{2}}^{3\sqrt{2}}\left(1+\frac{z^2}{6}\right)dz$$

$$=\frac{57\sqrt{2}}{27}\pi+\pi\left[z+\frac{z^3}{18}\right]_{\sqrt{2}}^{3\sqrt{2}}$$

$$=7\sqrt{2}\pi$$

$$\therefore\ V=7\sqrt{2}\pi$$ （答）