1

(1) 5（点）

$(a,b,c)=(1,1,3)$　のとき，$1+1+3=5$(点)

$\uparrow$

$1+1<3$

$P(5点)=\dfrac{1}{6^3}=\dfrac{1}{216}$　　……(アの答)

6（点）

$(a,b,c)=(1,1,4)$　のとき　$1+1+4=6$(点)

$\uparrow$

$1+1<4$

$=(1,1,1)$　のとき　$2(1+1+1)=6$(点)

$\uparrow$

$1+1\geqq 1$

7（点）

$(a,b,c)=(1,1,5)$　のとき　$1+1+5=7$(点)

$\uparrow$

$1+1<5$

$=(1,2,4)$　のとき　$1+2+4=7$(点)

$\uparrow$

$1+2<4$

$=(2,1,4)$　のとき　$2+1+4=7$(点)

$\uparrow$

$2+1<4$

8（点）

$(a,b,c)=(1,1,6)$　のとき　$1+1+6=8$(点)

$\uparrow$

$1+1<6$

$=(1,2,5)$　のとき　$1+2+5=8$(点)

$\uparrow$

$1+2<5$

$=(2,1,5)$　のとき　$2+1+5=8$(点)

$\uparrow$

$2+1<5$

$=(1,1,2)$　のとき　$2(1+1+2)=8$(点)

$\uparrow$

$1+1\geqq 2$

$=(1,2,1)$　のとき　$2(1+2+1)=8$(点)

$\uparrow$

$1+2\geqq 1$

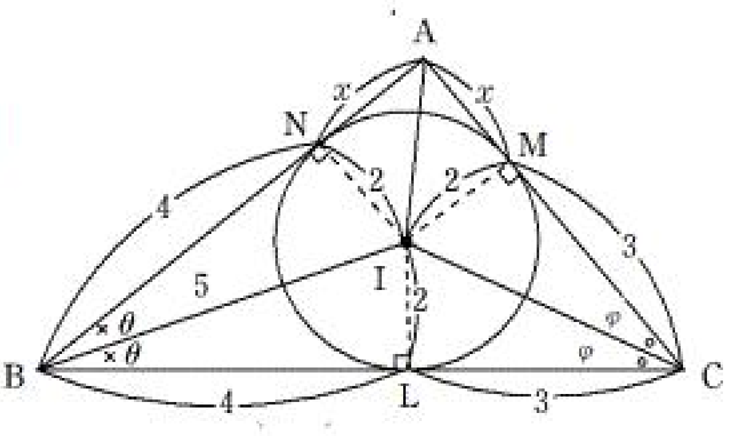
$=(2,1,1)$　のとき　$2(2+1+1)=8$(点)

$\uparrow$

$2+1\geqq 1$

以上12通りより　　$P(8点以下)=\dfrac{12}{6^3}=\dfrac{12}{216}=\dfrac{1}{18}$　　……(イの答)

(2) 右図のように内心をI，$\angle ABC=2\theta$，$\angle ACB=2\varphi$，接点をL，M，Nとおく，



$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=\dfrac{3}{5}$

$\Longleftrightarrow \cos^2\theta=\dfrac{4}{5}$　　$\therefore \cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}-1=\dfrac{5}{4}-1=\dfrac{1}{4}$

$\therefore \tan\theta=\dfrac{1}{2}\left(=\dfrac{2}{BL}\right)$ $\therefore BL=4$

$\cos 2\varphi=2\cos^2\varphi-1=\dfrac{5}{13}$

$\Longleftrightarrow \cos^2\varphi=\dfrac{9}{13}$　　$\therefore \cos\varphi=\dfrac{3}{\sqrt{13}}\left(0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\tan^2\varphi=\dfrac{1}{\cos^2\varphi}-1=\dfrac{13}{9}-1=\dfrac{4}{9}$

$\therefore \tan\varphi=\dfrac{2}{3}\left(=\dfrac{2}{CL}\right)$ $\therefore CL=3$

$\therefore BC=BL+CL=4+3=7$ (答)

$AN=AM=x(>0)$ $AN=AM=x(>0)$

$AN=AM=x(>0)$ とおくと，

$(x+3)^2=(x+4)^2+7^2-2\cdot(x+4)\cdot 7\cdot\cos 2\theta$　　$\left(\cos 2\theta=\dfrac{3}{5}\right)$

$\Longleftrightarrow x^2+6x+9=x^2+8x+16+49-\dfrac{42}{5}(x+4)$

$\Longleftrightarrow 42(x+4)=10x+280$

$\therefore x=AN=AM=\dfrac{7}{2}$

$\therefore \triangle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot(AB+BC+CA)$

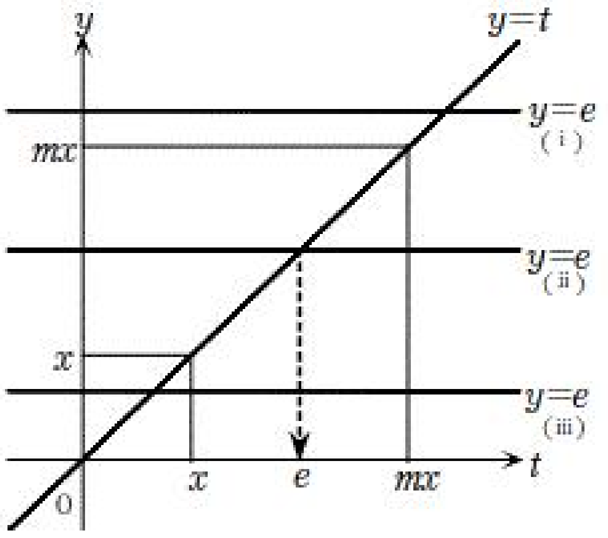
$=\left(\dfrac{7}{2}+4\right)+7+\left(3+\dfrac{7}{2}\right)$

$=21$ (答)

2

(1)

(ⅰ) $e \geqq mx\left(x \leqq \dfrac{e}{m}\right)$ のとき，



$$f(x)=\int_x^{mx}\frac{e-t}{t}dt$$
$$=\left[e\log t-t\right]_x^{mx}$$
$$=-(m-1)x+e\log m \quad (\downarrow)$$

(ⅱ) $x \leqq e \leqq mx\left(\dfrac{e}{m} \leqq x \leqq e\right)$ のとき，

$$f(x)=\int_x^{e}\frac{e-t}{t}dt+\int_e^{mx}\frac{t-e}{t}dt$$
$$=\left[e\log t-t\right]_x^{e}+\left[t-e\log t\right]_e^{mt}$$
$$=(m+1)x-2e\log x-e\log m$$

(ⅲ) $e \leqq x$ のとき，

$$f(x)=\int_x^{mx}\frac{t-e}{t}dt$$
$$=(m-1)x-e\log m \quad (\uparrow)$$

以上(ⅰ)，(ⅱ)，(ⅲ)をまとめて，

$$f(x)=\begin{cases}-(m-1)x+e\log m & \left(0<x\leqq\dfrac{e}{m}\right)\\ (m+1)x-2e\log x-e\log m & \left(\dfrac{e}{m}\leqq x\leqq e\right)\\ (m-1)x-e\log m & (e\leqq x)\end{cases}$$ (答)

(ⅱ)について，

$f(x)=(m+1)x-2e\log x-e\log m\ \left(\dfrac{e}{m}\leqq x\leqq e\right)$ より，

$f'(x)=m+1-\dfrac{2e}{x}=\dfrac{(m+1)x-2e}{x}\ \left(\dfrac{e}{m}<x<e\right)$

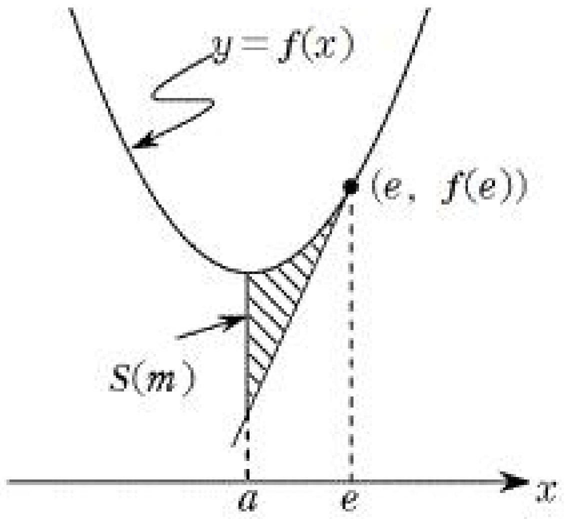
(ⅰ)，(ⅱ)，(ⅲ)をまとめて増減表を描く，

x	(0)	……	$\dfrac{e}{m}$	……	$\dfrac{2e}{m+1}$	……	e	……	$(+\infty)$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		↘		↘	(最小)	↗		↗	

$x=\dfrac{2e}{m+1}$ で最小となり，$a=\dfrac{2e}{m+1}$ (答)

(2) $\displaystyle\lim_{x\to e-0}\frac{f(x)-f(e)}{x-e}=m-1$ より，$y=f(x)$ 上の点 $(e, f(e))$ での接線は，

$y=(m-1)x-e\log m$ ((ⅲ)と同じ)



$$S(m)=\int_a^e\{(m+1)x-2e\log x-e\log m$$
$$-(m-1)x+e\log m\}dx$$
$$=\int_a^e(2x-2e\log x)dx$$
$$=\left[x^2-2e(x\log x-x)\right]_a^e$$
$$=e^2-a^2+2ae(\log a-1)$$

$$\therefore \lim_{\substack{m\to\infty\\(a\to+0)}}S(m)=\lim_{\substack{m\to\infty\\(a\to+0)}}\left(e^2-a^2-2ae\right)+\lim_{m\to\infty}2e\cdot\frac{2e}{m+1}\log\frac{2e}{m+1}$$
$$=\lim_{\substack{m\to\infty\\(a\to+0)}}\left(e^2-a^2-2ae\right)+4e^2\lim_{m\to\infty}\frac{\log 2e-\log(m+1)}{m+1}$$
$$=e^2 \quad (答)$$

3

(1) a, b, c は自然数，p, a は素数.

$$\begin{cases} a(ab-p^2)=c^2 & \cdots\cdots\cdots ① \\ b \leqq 2c & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

①より，c^2 は a を約数にもち，a は素数より，c が a を約数にもつ.

$$\therefore\ c=ka\ \left(k \text{は自然数}\right)$$

①へ代入して，$a(ab-p^2)=k^2a^2$

$$\iff ab-p^2=k^2a$$
$$\iff a(b-k^2)=p^2 \quad \cdots\cdots ③$$

上記と同様，　p^2 は a を約数にもち，p と a はともに素数より，$\underline{\underline{p=a}}$

③に代入して，

$$b-k^2=a \iff b=k^2+a$$

これと②より，

$$k^2+a \leqq 2ka \iff k^2-2ka+a \leqq 0 \quad \cdots\cdots ④$$

ここで，　$p=a$ (p は定数) より a は1つに決まり，$\begin{cases} b=k^2+a \\ c=ka \end{cases}$ より，k の値に対し，

(b, c) は決定される.

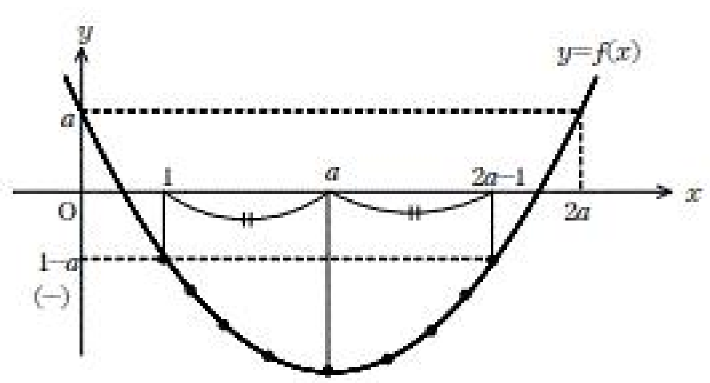
つまり，　$\underline{\underline{(a, b, c) \text{の組の数は自然数} k \text{の数と同じ.}}}$

そこで，

$$f(x)=x^2-2ax+a$$
$$=(x-a)^2+a-a^2$$

を用いて調べる.

$k=1, 2, 3, \cdots\cdots, \underset{(2p-1)}{2a-1}$ で④をみたす.



よって，　(a, b, c) の組の数は，　$2p-1$ (個) (答)

(2)

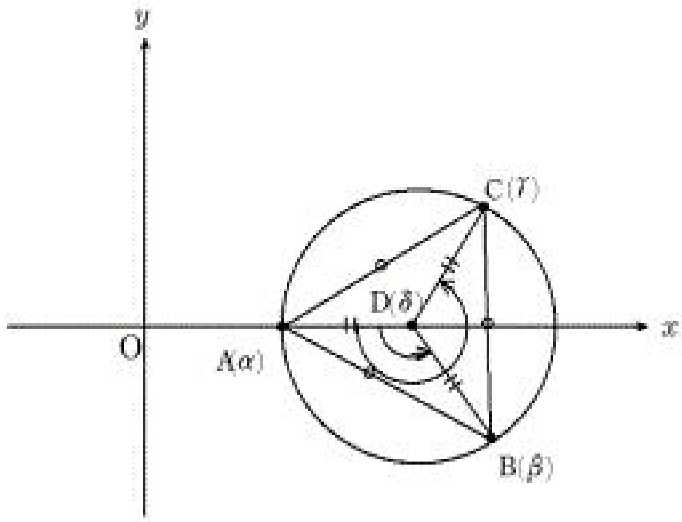
(1)において，　$\begin{cases} b=k^2+a \\ c=ka \end{cases}$ より，　$\underbrace{k=1, 2, 3, \cdots\cdots, a, \cdots\cdots, 2a-1}_{2p-1\text{（個）}}$ のうち

$k=a$ のとき，$\begin{cases} b=a(a+1) \\ c=a^2 \end{cases}$ となり，　$G.C.M \neq 1$　つまり，$k \neq a$ ならよいから

$\underbrace{k=1, 2, 3, \cdots\cdots, a-1, a+1, \cdots\cdots, 2a-1}_{(2p-1)-1=2p-2\text{（個）}}$ の $2p-2$ (個) (答)

4

(1)



$\omega=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$ とすると,

$=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\omega^2+\omega+1=0,\ \omega^3=1$ ……①

$$\begin{cases}\beta-\delta=\omega(\alpha-\delta)\\ \gamma-\delta=\omega^2(\alpha-\delta)\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases}\beta=\omega(\alpha-\delta)+\delta\\ \gamma=\omega^2(\alpha-\delta)+\delta\end{cases}$$

ここで, $\alpha\beta\delta=-1$ より, $z=\alpha-\delta$ とおくと,

$$(z+\delta)(\omega z+\delta)(\omega^2z+\delta)=-1$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\omega^3}_{1}z^3+\omega\underbrace{(1+\omega+\omega^2)}_{0}z^2\delta+\underbrace{(1+\omega+\omega^2)}_{0}z\delta^2+\delta^3=-1$$

$$\Longleftrightarrow z^3+\delta^3=-1\ (\because ①)$$

$$\therefore\ z^3=-1-\delta^3\ \underline{(実数)}\ (\because \delta>-1)\ \cdots\cdots ②$$

$$\therefore\ l=|z|=(1+\delta^3)^{\frac{1}{3}}\ (答)$$

(2) ②より, $\arg z^3=-\pi+2n\pi$ (n:整数)

$$\therefore\ \arg z=-\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}n\pi$$

ここで, $-\pi\leqq\arg\alpha<\arg\beta<\arg r<\pi$ より,

$$n=-1\ \left(\underbrace{\arg z=-\pi}_{(実軸上)}\right)$$

$$\therefore\ \alpha=z+\delta=\delta-(1+\delta^3)^{\frac{1}{3}} \quad (答)$$

$$\therefore\ \beta=\omega\left\{\delta-(1+\delta^3)^{\frac{1}{3}}-\delta\right\}+\delta$$

$$=\delta-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1+\delta^3)^{\frac{1}{3}} \quad (答)$$

$$\therefore\ \gamma=\omega^2\left\{\delta-(1+\delta^3)^{\frac{1}{3}}-\delta\right\}+\delta$$

$$=\delta-\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1+\delta^3)^{\frac{1}{3}}$$

$$=\delta+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1+\delta^3)^{\frac{1}{3}} \quad (答)$$