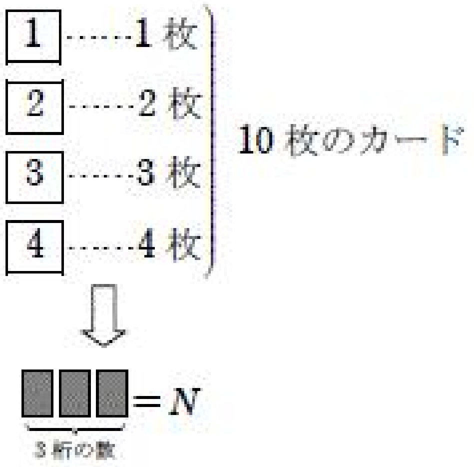
1．



(1) (i) $\left(\boxed{1},\boxed{2},\boxed{3}\right)$の組　$\left({}_1C_1\cdot{}_2C_1\cdot{}_3C_1\right)\cdot 3!=36$ 通り

(ii) $\left(\boxed{1},\boxed{4},\boxed{4}\right)$の組　$\left({}_1C_1\cdot{}_4C_2\right)\cdot 3!=36$ 通り

(iii) $\left(\boxed{2},\boxed{3},\boxed{4}\right)$の組　$\left({}_2C_1\cdot{}_3C_1\cdot{}_4C_1\right)\cdot 3!=144$ 通り

(iv) $\left(\boxed{3},\boxed{3},\boxed{3}\right)$の組　$\left({}_3C_3\right)\cdot 3!=6$ 通り

(v) $\left(\boxed{4},\boxed{4},\boxed{4}\right)$の組　$\left({}_4C_3\right)\cdot 3!=24$ 通り

$$\therefore\ P=\frac{36+36+144+6+24}{10\cdot 9\cdot 8}=\frac{246}{720}=\overset{(ア)}{\boxed{\frac{41}{120}}}$$　(答)

「N が 6 の倍数」＝「(N が 3 の倍数)　かつ　(N が 2 の倍数)　」

(i) の組　$\left({}_1C_1\cdot{}_2C_1\cdot{}_3C_1\right)\cdot 2=12$ 通り

(ii) の組　$\left({}_1C_1\cdot{}_4C_2\right)\cdot 4=24$ 通り

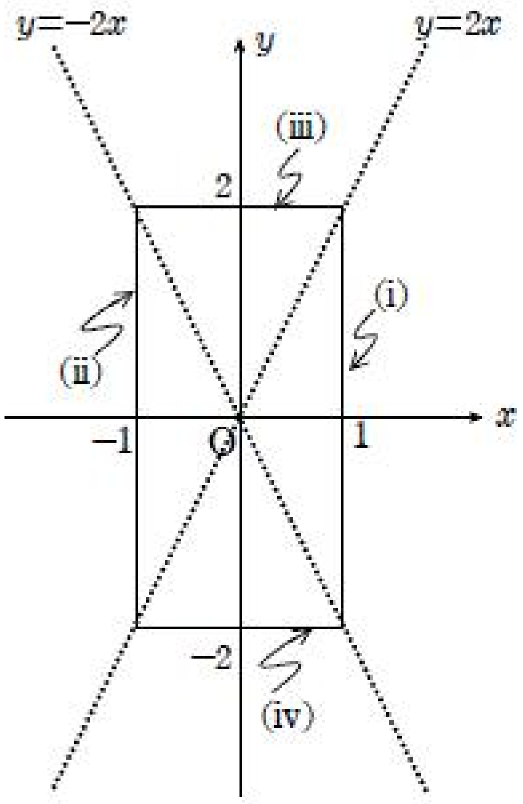
(iii) の組　$\left({}_2C_1\cdot{}_3C_1\cdot{}_4C_1\right)\cdot 4=96$ 通り

(iv) の組　$\left({}_3C_3\right)\cdot 0=0$ 通り

(v) の組　$\left({}_4C_3\right)\cdot 3!=24$ 通り

$$\therefore\ P=\frac{12+24+96+24}{10\cdot 9\cdot 8}=\frac{156}{720}=\overset{(イ)}{\boxed{\frac{13}{60}}}$$　(答)

(2) $|2x+y|+|2x-y|=4$ を xy 平面に図示すると右図の通り．



$F=2x^2+xy-y^2$ のとり得る値の範囲を 4 個に分けて調べる．

(i) $x=1,\ -2\leqq y\leqq 2$ のとき

$$F=-y^2+y+2$$
$$=-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\qquad \therefore\ -4\leqq F\leqq\frac{9}{4}\ \cdots\cdots①$$

(ii) $x=-1,\ -2\leqq y\leqq 2$ のとき

$$F=-y^2-y+2$$
$$=-\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\qquad \therefore\ -4\leqq F\leqq\frac{9}{4}\ \cdots\cdots②$$

(iii) $y=2,\ -1\leqq x\leqq 1$ のとき

$$F=2x^2+2x-4$$
$$=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{2}\qquad \therefore\ -\frac{9}{2}\leqq F\leqq 0\ \cdots\cdots③$$

(iv) $y=-2,\ -1\leqq x\leqq 1$ のとき

$$F=2x^2-2x-4$$
$$=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{2}\qquad \therefore\ -\frac{9}{2}\leqq F\leqq 0\ \cdots\cdots④$$

以上①～④より，$-\dfrac{9}{2}\leqq F\leqq\dfrac{9}{4}$

$$\therefore\ \underset{(答)}{\overset{(ウ)}{\boxed{-\frac{9}{2}}}}\leqq 2x^2+xy-y^2\leqq\underset{(答)}{\overset{(エ)}{\boxed{\frac{9}{4}}}}$$

2．

(1) $f_n(x)=e^{-x}x^{n+1}+\underbrace{\int_0^x e^{-t}f_n(x-t)\,dt}_{(A)}$ ……①

(A)において， $u=x-t$ ∴ $du=-dt$

t	$0 \to x$
u	$x \to 0$

$$(A)=\int_x^0 e^{u-x}f_n(u)\cdot(-1)\,du=e^{-x}\int_0^x e^u f_n(u)\,du$$

①へ代入すると，

$$f_n(x)=e^{-x}x^{n+1}+e^{-x}\int_0^x e^t f_n(t)\,dt$$

$$\Longleftrightarrow\ e^x f_n(x)=x^{n+1}+\int_0^x e^t f_n(t)\,dt \quad \cdots\cdots ②$$

②の辺々を x で微分すると，

$$e^x f_n(x)+e^x f'_n(x)=(n+1)x^n+e^x f_n(x)$$

$$\Longleftrightarrow\ e^x f'_n(x)=(n+1)x^n \qquad \therefore\ \underline{\frac{d}{dx}f_n(x)=(n+1)e^{-x}x^n}\ （答）$$

(2) $g_m(x)=e^{-x}x^m$ $(m=2,3,4,\cdots\cdots,x>0)$とおく．

$$g'_m(x)=-e^{-x}x^m+e^{-x}\cdot mx^{m-1}$$
$$=\underbrace{e^{-x}x^{m-1}}_{(+)}(m-x)$$

x	(0)	$\cdots$	m	$\cdots$	$(+\infty)$
$g'_m(x)$		$+$	0	$-$	
$g_m(x)$		↗	（最大）	↘	

増減表より，

$$g_m(x)\leqq g_m(m)$$

$\therefore\ \underline{e^{-x}x^m\leqq e^{-m}m^m\ \ (m=2,3,4,\cdots\cdots,x>0)}$は示された（証明終）

(3) ①より，$f_n(0)=0$ なので，(1)の結果を用いて，

$f_n(x)=(n+1)\int_0^x e^{-t}t^n\,dt$ と表せる．

ここで，

$$f_n(x)=(n+1)\int_0^x(-e^{-t})'t^n\,dt$$
$$=-(n+1)\left[e^{-t}t^n\right]_0^x+(n+1)\int_0^x e^{-t}\cdot nt^{n-1}\,dt$$
$$=-(n+1)e^{-x}x^n+(n+1)\underbrace{\boxed{n\int_0^x e^{-t}t^{n-1}\,dt}}_{f_{n-1}(x)}$$
$$=\cdots\cdots$$
$$=-(n+1)e^{-x}x^n-(n+1)ne^{-x}x^{n-1}\cdots\cdots$$
$$+(n+1)n(n-1)\cdots\cdots 3\cdot\underbrace{\boxed{2\int_0^x e^{-t}t\,dt}}_{f_1(x)=2(-e^{-x}x-e^{-x}+1)}$$

(2) より， $m\geqq 2,\ x>0$ において，

$$0<e^{-x}x^m\leqq e^{-m}m^m$$
$$\Longleftrightarrow\ 0<e^{-x}x^{m-1}\leqq\frac{e^{-m}m^m}{x}$$

$M=m-1$ $(M\geqq 1)$

$$\Longleftrightarrow\ 0<e^{-x}x^M\leqq\frac{e^{-m}m^m}{x}$$

（最右辺）$\to 0$ $(x\to\infty)$ はさみうちの原理より， $\lim_{x\to\infty}e^{-x}x^M=0$ $(M\geqq 1)$

$$\therefore\ \lim_{x\to\infty}f_n(x)=(n+1)n(n-1)\cdots\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$
$$=\underline{(n+1)!}\ （答）$$

3．

(1) $f_1(x)=x^2+x-\dfrac{1}{4}=x^2\cdot 1+\underline{\underline{x-\dfrac{1}{4}}}$　$\left(a_1=1,\ b_1=-\dfrac{1}{4}\right)$

$$\begin{aligned}f_2(x)=f_1(f_1(x))&=\{f_1(x)\}^2+f_1(x)-\frac{1}{4}\\&=\left(x^2+x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(x^2+x-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}\\&=x^4+2x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{7}{16}\\&=x^2\left(x^2+2x+\frac{3}{2}\right)+\underline{\underline{\frac{1}{2}x-\frac{7}{16}}}\ \ \underline{\left(a_2=\frac{1}{2},\ b_2=-\frac{7}{16}\right)\text{（答）}}\end{aligned}$$

(2) $f_n(x)=x^2F_n(x)+a_nx+b_n$　（$F_n(x)$は$f_n(x)$をx^2で割ったときの商となる整式）

とすると，

$$\begin{aligned}f_{n+1}(x)&=\{x^2F_n(x)+a_nx+b_n\}^2+\{x^2F_n(x)+a_nx+b_n\}-\frac{1}{4}\\&=x^4\{F_n(x)\}^2+2x^2F_n(x)(a_nx+b_n)+(a_nx+b_n)^2+x^2F_n(x)+a_nx+b_n-\frac{1}{4}\\&=\boxed{x\text{の2次以上の整式}}+\underbrace{a_n(2b_n+1)}_{a_{n+1}}x+\underbrace{b_n{}^2+b_n-\frac{1}{4}}_{b_{n+1}}\end{aligned}$$

これより，

$$\begin{cases}a_{n+1}=a_n(2b_n+1)\ \cdots\cdots①\\ b_{n+1}=b_n{}^2+b_n-\dfrac{1}{4}\ \cdots\cdots②\\ a_1=1,\ b_1=-\dfrac{1}{4}\end{cases}$$　が導ける．

②より，

$$2b_{n+1}+1=\frac{1}{2}(2b_n+1)^2$$

これより

$$\underbrace{2b_1+1}_{\left(\frac{1}{2}\right)}>\underbrace{2b_2+1}_{\left(\frac{1}{8}\right)}>\underbrace{2b_3+1}_{\left(\frac{1}{128}\right)}>\cdots\cdots>0$$　と考えられる．

ここで「$0<2b_n+1\leqq\dfrac{1}{2}$ $(n=1,2,3,\cdots\cdots)$」$\cdots\cdots(*)$を示す．

(I) $n=1$のとき，$2b_1+1=\dfrac{1}{2}$より成立．

(II) $n=k$のとき成立を仮定する．つまり，$0<2b_k+1\leqq\dfrac{1}{2}$としたとき，

$2b_{k+1}+1=\dfrac{1}{2}(2b_k+1)^2$より，$0<2b_{k+1}+1\leqq\dfrac{1}{8}<\dfrac{1}{2}$

よって，$n=k+1$でも成立．

以上(I)，(II)より，$(*)$は$n=1,2,3,\cdots\cdots$において成立．

①より，

$$|a_{n+1}|=(2b_n+1)|a_n|\leqq\frac{1}{2}|a_n|$$

$$\therefore\ 0\leqq|a_n|\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|a_1|=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

（最右辺）$\to 0$ $(n\to\infty)$

はさみうちの原理より，$\underline{\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0\text{（答）}}$

4．

(1) $\overrightarrow{OQ}=\left(4\cos\theta, \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta, \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)$ より，$\left|\overrightarrow{OQ}\right|=\sqrt{16\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\sqrt{15\cos^2\theta+1}$

$$\therefore\ \overrightarrow{OR}=4\frac{\overrightarrow{OQ}}{\left|\overrightarrow{OQ}\right|}=\frac{4}{\sqrt{15\cos^2\theta+1}}\left(4\cos\theta, \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta, \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{15\cos^2\theta+1}}\left(16\cos\theta, 2\sqrt{2}\sin\theta, 2\sqrt{2}\sin\theta\right)$$

ここで，

$$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}$$
$$=\left(\left(\frac{16}{\sqrt{15\cos^2\theta+1}}-4\right)\cos\theta, \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15\cos^2\theta+1}}-2\sqrt{2}\right)\sin\theta, \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15\cos^2\theta+1}}-2\sqrt{2}\right)\sin\theta\right)$$

よって，

$$\left|\overrightarrow{PR}\right|^2=16\left(\frac{16}{15\cos^2\theta+1}-\frac{8}{\sqrt{15\cos^2\theta+1}}+1\right)\cos^2\theta+$$
$$2\cdot 8\left(\frac{1}{15\cos^2\theta+1}-\frac{2}{\sqrt{15\cos^2\theta+1}}+1\right)\sin^2\theta$$
$$=32-\frac{32(3\cos^2\theta+1)}{\sqrt{15\cos^2\theta+1}}$$

ここで，$f(t)=32-\frac{32(3t+1)}{\sqrt{15t+1}}$ $(0<t<1)$ とする．

$$f'(t)=-32\cdot\frac{3\sqrt{15t+1}-(3t+1)\cdot\frac{15}{2\sqrt{15t+1}}}{15t+1}$$
$$=-32\cdot\frac{6(15t+1)-15(3t+1)}{2(15t+1)\sqrt{15t+1}}$$
$$=\frac{144(1-5t)}{(15t+1)\sqrt{15t+1}}$$

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{5}$	$\cdots$	(1)
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗	(最大)	↘	

$t=\frac{1}{5}$ $\left(つまり, \underline{\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}}\ (答)\right)$ のとき，$\left|\overrightarrow{PR}\right|$ は最大となり，

$\left(\left|\overrightarrow{PR}\right| の最大値\right)=\sqrt{f\left(\frac{1}{5}\right)}=\sqrt{\frac{32}{5}}=\underline{\frac{4\sqrt{10}}{5}}$ (答)

(2) $\cos=\frac{1}{\sqrt{5}}, \sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$ のときで考える．

$$\overrightarrow{OP}=\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right), \overrightarrow{OR}=\left(\frac{8}{\sqrt{5}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$$

2点P，Rの中点をNとおくと，

$$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OR}\right)=\left(\frac{6}{\sqrt{5}}, \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right), \left|\overrightarrow{ON}\right|=\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$
$$\therefore\ \overrightarrow{OM}=\frac{4}{\left|\overrightarrow{ON}\right|}\overrightarrow{ON}=\frac{4}{\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{5}}}\left(\frac{6}{\sqrt{5}}, \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)=\left(2\sqrt{2}, 2, 2\right)$$

以上より，

$$\begin{cases}\overrightarrow{OM}=\left(2\sqrt{2}, 2, 2\right), \left|\overrightarrow{OM}\right|=4\\ \overrightarrow{OA}=(4, 0, 0), \quad \left|\overrightarrow{OA}\right|=4\\ \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OA}=8\sqrt{2}\end{cases}$$

$$\therefore\ \triangle MOA=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{OM}\right|^2\left|\overrightarrow{OA}\right|^2-\left(\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OA}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{16\cdot 16-\left(8\sqrt{2}\right)^2}$$
$$=\underline{4\sqrt{2}}\ (答)$$