

1.

- (1) 事象 E = 「白玉 または 赤玉を取り出す」 …… $(x \text{ 成分}) + (y \text{ 成分})$ は $(+1)$
 事象 F = 「青玉を取り出す」 …… $(x \text{ 成分}) + (y \text{ 成分})$ は (-1)

$$\circ \quad F \longrightarrow E \longrightarrow E \text{ の順 } \left(2 \xrightarrow{(-1)} 1 \xrightarrow{(+1)} 2 \xrightarrow{(+1)} \textcircled{3} \right)$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \overset{(7)}{\boxed{\frac{9}{64}}}$$

$$\circ \cdot E \longrightarrow F \longrightarrow F \longrightarrow F \text{ の順 } \left(2 \xrightarrow{(+1)} \textcircled{3} \xrightarrow{(-1)} 2 \xrightarrow{(-1)} 1 \xrightarrow{(-1)} \textcircled{0} \right)$$

または

$$\cdot F \longrightarrow F \longrightarrow E \longrightarrow F \text{ の順 } \left(2 \xrightarrow{(-1)} 1 \xrightarrow{(-1)} \textcircled{0} \xrightarrow{(+1)} 1 \xrightarrow{(-1)} \textcircled{0} \right)$$

または

$$\cdot F \longrightarrow F \longrightarrow F \longrightarrow E \text{ の順 } \left(2 \xrightarrow{(-1)} 1 \xrightarrow{(-1)} \textcircled{0} \xrightarrow{(-1)} -1 \xrightarrow{(+1)} \textcircled{0} \right)$$

これら全て排反より,

$$\begin{aligned} & \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \\ &= \frac{3+3+3}{256} \\ &= \overset{(7)}{\boxed{\frac{9}{256}}} \end{aligned}$$

(2) $\cos B = \frac{16+25-36}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{8}$

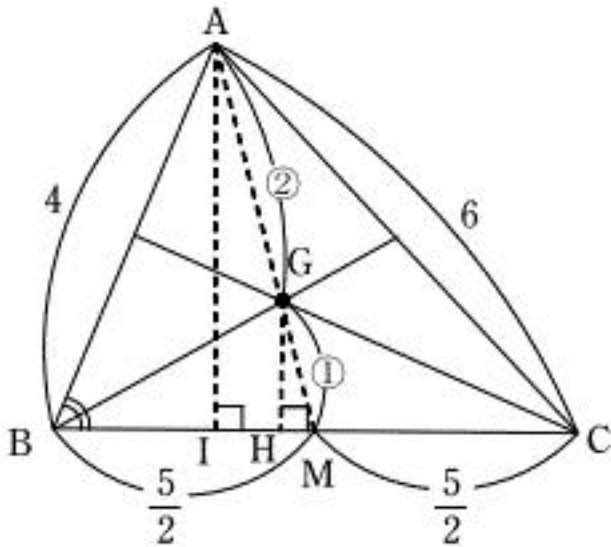
右図の通り 2 点 I, M を定める.

$$\begin{cases} BI = 4 \cos B = \frac{1}{2} \\ IM = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2 \end{cases}$$

これより,

$$\begin{aligned} BH &= BI + IH \\ &= \frac{1}{2} + IM \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{4}{3} \\ &= \frac{11}{6} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{BH}{BC} = \frac{\frac{11}{6}}{5} = \overset{(7)}{\boxed{\frac{11}{30}}}$$



2.

$$(1) \quad C_1: f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} \text{ とする.}$$

$$f'(x) = \frac{3e^x(e^x + 1) - (3e^x - 1) \cdot e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$$

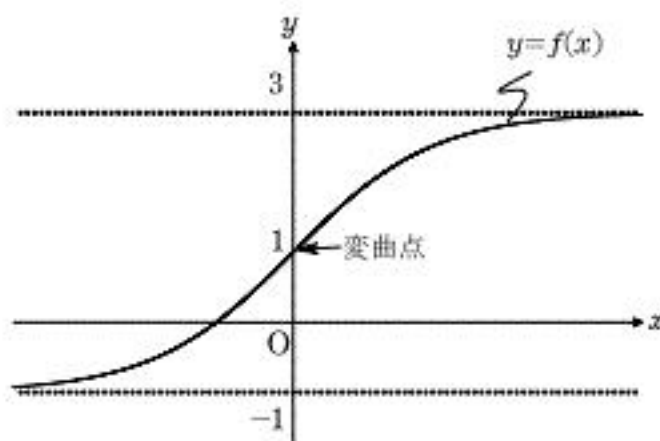
$$f''(x) = \frac{4e^x(e^x + 1)^2 - 4e^x \cdot 2(e^x + 1) \cdot e^x}{(e^x + 1)^4} = \frac{4e^x(1 - e^x)}{(e^x + 1)^3}$$

増減表を描くと以下の通り.

x	$(-\infty)$		0		$(+\infty)$
$f'(x)$		+	+	+	
$f''(x)$		+	0	-	
$f(x)$	(-1)	$\nearrow$	$(0, 1)$	$\searrow$	(3)

変曲点

$$\left(\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \end{array} \right)$$



グラフを描くと右図の通り.

$$(2) \quad C_2: g(x) = \frac{e^x}{a^2} + b \text{ とおく. } g'(x) = \frac{e^x}{a^2}$$

C_1 と C_2 の共有点 P の x 座標を t とする.

$$\begin{cases} f(t) = g(t) \\ f'(t) = g'(t) \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{3e^t - 1}{e^t + 1} = \frac{e^t}{a^2} + b \quad \dots\dots ① \\ \frac{4e^t}{(e^t + 1)^2} = \frac{e^t}{a^2} \quad \dots\dots ② \end{cases}$$

②より, $a > 1$ だから,

$$a = \frac{1}{2}(e^t + 1)$$

つまり, $t = \log(2a - 1)$

$$\text{また, } f(t) = \frac{3e^t - 1}{e^t + 1} = \frac{3(2a - 1) - 1}{2a - 1 + 1} = \frac{3a - 2}{a}$$

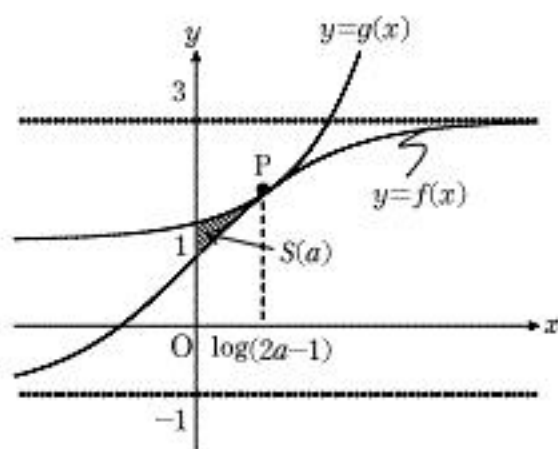
$$\therefore P\left(\log(2a - 1), \frac{3a - 2}{a}\right) \quad (\text{答})$$

また①より,

$$\begin{aligned} b &= \frac{3(2a - 1) - 1}{2a - 1 + 1} - \frac{2a - 1}{a^2} \\ &= \frac{3a - 2}{a} - \frac{2a - 1}{a^2} \\ &= \frac{3a^2 - 4a + 1}{a^2} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^{\log(2a-1)} \left(\frac{e^x}{a^2} + b - \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} \right) dx \\ &= \int_0^{\log(2a-1)} \left(\frac{e^x}{a^2} + \frac{3a^2 - 4a + 1}{a^2} - 3 + \frac{4}{e^x + 1} \right) dx \\ &= \int_0^{\log(2a-1)} \left(\frac{e^x}{a^2} - \frac{4}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{4}{e^x + 1} \right) dx \\ &= \left[\frac{e^x}{a^2} + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{4}{a} \right) x \right]_0^{\log(2a-1)} + 4 \int_0^{\log(2a-1)} \frac{dx}{e^x + 1} \\ &= \frac{2a - 1}{a^2} + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{4}{a} \right) \log(2a - 1) - \frac{1}{a^2} + 4 \int_1^{2a-1} \frac{du}{(u + 1)u} \\ &= \frac{2(a - 1)}{a^2} + \frac{\log(2a - 1)}{a^2} - \frac{4 \log(2a - 1)}{a} + 4 \left[\log \frac{u}{u + 1} \right]_1^{2a-1} \\ &= \frac{2(a - 1)}{a^2} + \frac{\log(2a - 1)}{a^2} - \frac{4 \log(2a - 1)}{a} + 4 \log \frac{2a - 1}{2a} + 4 \log 2 \quad (\text{答}) \\ \therefore \lim_{a \rightarrow \infty} S(a) &= 4 \log 2 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$



$$e^x = u \quad \text{このとき, } e^x dx = du$$

x	0	$\rightarrow$	$\log(2a - 1)$
u	1	$\rightarrow$	$2a - 1$

3.

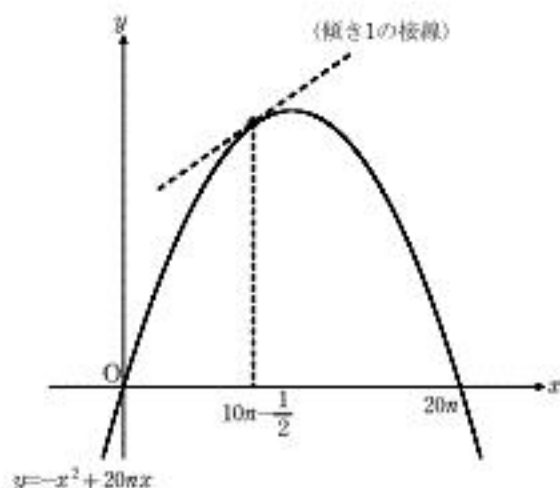
$y-x=k$ ($\iff y=x+k$) とおく.

次に, $y=-x^2+20nx$ の曲線上の点における接線で (傾き)=1 となるものは,

$$-2x+20n=1 \text{ より, } \underline{x=10n-\frac{1}{2}}$$

次に,

$$\begin{aligned} -x^2+20nx &= \frac{12n}{m}x \\ \iff x^2 + \left(\frac{12n}{m}-20n\right)x &= 0 \\ \iff x \left\{ x + \left(\frac{12n}{m}-20n\right) \right\} &= 0 \\ \therefore x=0, 20n-\frac{12n}{m} \end{aligned}$$



ここで, $x=10n-\frac{1}{2}$ と $x=20n-\frac{12n}{m}$ の大小について注意する.

(i) $m=1$ のとき, $20n-\frac{12n}{m}=8n < 10n-\frac{1}{2}$

$y=x+k$ が右図の斜線部分と共有点を持ち, かつ (x, y) は自然数成分で k をより大きくとるためには, $(x, y)=(8n, 96n^2)$ とすればよい.

$$\therefore k_{\max.} = 96n^2 - 8n$$

(ii) $m \geq 2$ のとき,

$$20n-\frac{12n}{m} \geq 20n-6n=14n > 10n-\frac{1}{2}$$

$y=x+k$ が右図の斜線部分と共有点を持ち, かつ (x, y) は自然数成分で k をより大きくとるためには, $(x, y)=(10n-1, 100n^2-1)$ または, $(10n, 100n^2)$ とすればよい.

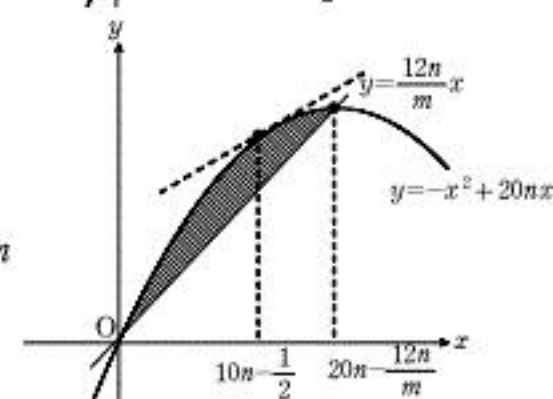
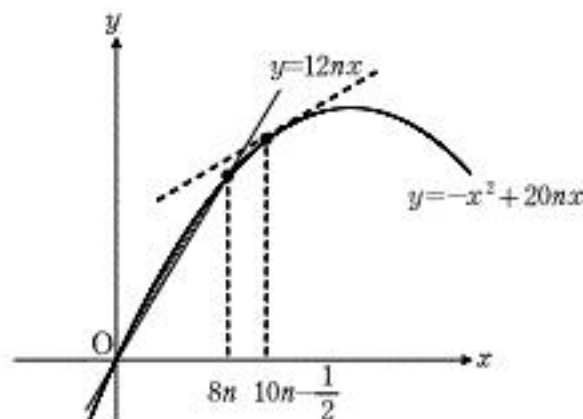
双方ともに同じ $k=100n^2-10n$ $\therefore k_{\max.} = 100n^2-10n$

以上(i), (ii)をまとめて,

$$[(y-x) \text{ の最大値}] = \begin{cases} 96n^2-8n & (m=1 \text{ のとき}) \\ 100n^2-10n & (m \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (\text{答})$$

またこのとき,

$$(x, y) = \begin{cases} (8n, 96n^2) & (m=1 \text{ のとき}) \\ (10n-1, 100n^2-1) \text{ または } (10n, 100n^2) & (m \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$



4.

(1)

$$\begin{aligned}
 w &= |w| \cdot \frac{z}{|z|} \\
 &= \frac{z}{|z|^2} \quad \left(|w| = \frac{1}{|z|} \right) \\
 &= \frac{z}{z\bar{z}} \\
 &= \frac{1}{\bar{z}} \quad (\text{証明終})
 \end{aligned}$$

(2)

$$x^3 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+1)=0 \quad \therefore x=-1, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

これより, $\alpha = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $\bar{\alpha} = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ に対し, $A(\alpha), B(-1), C(\bar{\alpha})$ となる.

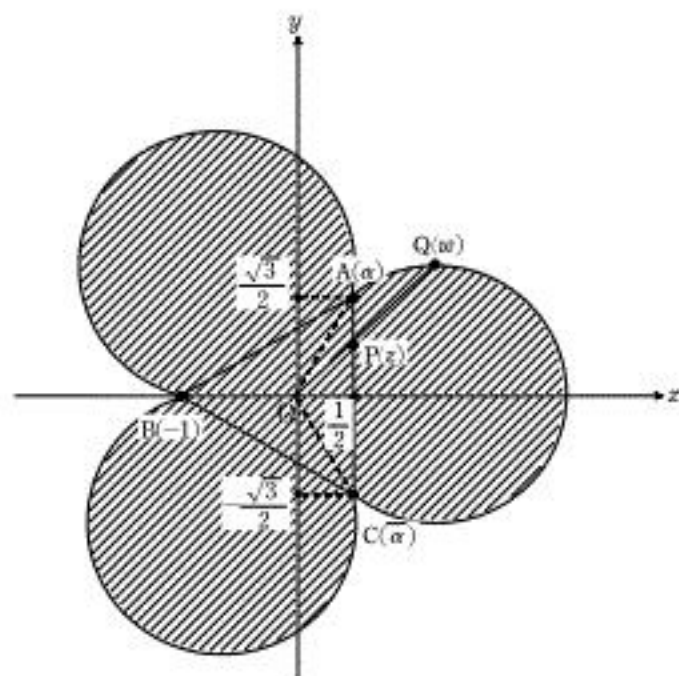
ここで, $P(z)$ が辺 AC 上を動くときを考える.

$$z = \frac{1}{2} + ti \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ に対し,}$$

$w = x + yi$ (x と y は実数) と表せる.

(1) より,

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{1}{\frac{1}{2} - ti} = \frac{\frac{1}{2} + ti}{\frac{1}{4} + t^2} \text{ より,} \\
 \begin{cases} x = \frac{2}{4t^2 + 1} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ で } \frac{1}{2} \leq x \leq 2 \right) \\ y = \frac{4t}{4t^2 + 1} \end{cases}
 \end{aligned}$$



$$\text{ここで, } x \neq 0 \text{ であることから, } \frac{y}{x} = 2t \quad \left(\Leftrightarrow t = \frac{y}{2x} \right)$$

$$\text{よって, } x = \frac{2}{4 \cdot \frac{y^2}{4x^2} + 1} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$$

$(x-1)^2 + y^2 = 1$ $\left(\frac{1}{2} \leq x \leq 2 \right)$ を描き, $P(z)$ が辺 AB 上, 辺 BC 上は同様に考えると

右上図の通り (求める面積は右上図の斜線部分の面積)

$$\begin{aligned}
 \therefore S &= 3 \left\{ \frac{2}{3} (\pi \cdot 1^2) + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \right\} \\
 &= 2\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$