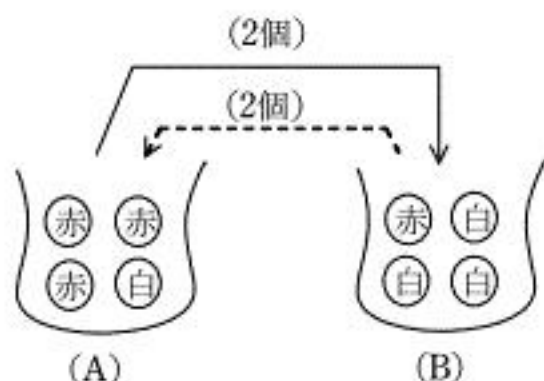




$$(i) \quad (A) \xrightleftharpoons[\text{白 白}]{\text{赤 赤}} (B) \quad (A) \text{ の } \text{白} \text{ の 個数は } 3 \text{ 個} \quad \frac{{}_3C_2 \cdot {}_3C_2}{{}_4C_2 \cdot {}_6C_2} = \frac{1}{10}$$

$$(ii) \quad (A) \xrightleftharpoons[\text{赤 白}]{\text{赤 赤}} (B) \quad (A) \text{ の } \text{白} \text{ の 個数は } 2 \text{ 個} \quad \frac{{}_3C_2 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_3C_1}{{}_4C_2 \cdot {}_6C_2} = \frac{3}{10}$$

$$(iii) \quad (A) \xrightleftharpoons[\text{白 白}]{\text{赤 白}} (B) \quad (A) \text{ の } \text{白} \text{ の 個数は } 2 \text{ 個} \quad \frac{{}_3C_1 \cdot {}_1C_1 \cdot {}_4C_2}{{}_4C_2 \cdot {}_6C_2} = \frac{1}{5}$$

$$(i) \sim (iii) \text{ はすべて排反より, 求める確率は } \frac{1}{10} + \frac{3}{10} + \frac{1}{5} = \boxed{\frac{3}{5}} \quad (\text{答})$$

$$(iv) \quad (A) \xrightleftharpoons[\text{白 白}]{\text{赤 赤}} (B) \times (A) \xrightleftharpoons[\text{白 白}]{\text{赤 白}} (B) \quad \frac{{}_3C_2 \cdot {}_3C_2 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_1C_1 \cdot {}_2C_2}{{}_4C_2 \cdot {}_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_6C_2} = \frac{1}{300}$$

$$(v) \quad (A) \xrightleftharpoons[\text{赤 白}]{\text{赤 赤}} (B) \times (A) \xrightleftharpoons[\text{白 白}]{\text{赤 赤}} (B) \quad \frac{{}_3C_2 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_2C_2 \cdot {}_2C_2}{{}_4C_2 \cdot {}_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_6C_2} = \frac{1}{300}$$

$$(vi) \quad (A) \xrightleftharpoons[\text{白 白}]{\text{赤 白}} (B) \times (A) \xrightleftharpoons[\text{白 白}]{\text{赤 赤}} (B) \quad \frac{{}_3C_1 \cdot {}_1C_1 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot {}_2C_2}{{}_4C_2 \cdot {}_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_6C_2} = \frac{1}{450}$$

$$(iv) \sim (vi) \text{ はすべて排反より, 求める確率は } \frac{1}{300} + \frac{1}{300} + \frac{1}{450} = \boxed{\frac{2}{225}} \quad (\text{答})$$

(1) $g(t) = t - \log(1+t)$ ($t \geq 0$) とおく.

$$g'(t) = 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t} \geq 0$$

$y = g(t)$ は $t \geq 0$ で単調増.

$$g(t) \geq g(0) = 0 \quad \therefore g(t) \geq 0 \quad \dots\dots ①$$

$h(t) = \log(1+t) - \frac{t}{1+t}$ ($t \geq 0$) とおく.

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{1}{1+t} - \frac{1 \cdot (1+t) - t \cdot 1}{(1+t)^2} \\ &= \frac{1+t-1-t+t}{(1+t)^2} \\ &= \frac{t}{(1+t)^2} \geq 0 \end{aligned}$$

$y = h(t)$ は $t \geq 0$ で単調増加.

$$h(t) \geq h(0) = 0 \quad \therefore h(t) \geq 0 \quad \dots\dots ②$$

以上①, ②より, $\frac{t}{1+t} \leq \log(1+t) \leq t$ ($t \geq 0$) $\dots\dots ③$ は示された. (証明終)

(2) $x > 0$ において, $1 + \frac{x}{n}, 1 + \frac{x}{n+1}, 1 + \frac{x}{n+2}, \dots\dots, 1 + \frac{x}{pn}$ は全て正.

$$\begin{aligned} \log f_n(x) &= \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) + \log\left(1 + \frac{x}{n+1}\right) + \log\left(1 + \frac{x}{n+2}\right) + \dots\dots + \log\left(1 + \frac{x}{pn}\right) \\ &= \sum_{k=n}^{pn} \log\left(1 + \frac{x}{k}\right) \end{aligned}$$

ここで, ③を用いて $t = \frac{x}{k}$ (> 0) を代入.

$$\frac{\frac{x}{k}}{1 + \frac{x}{k}} \leq \log\left(1 + \frac{x}{k}\right) \leq \frac{x}{k}$$

$$\therefore \sum_{k=n}^{pn} \frac{\frac{x}{k}}{1 + \frac{x}{k}} \leq \log f_n(x) \leq \sum_{k=n}^{pn} \frac{x}{k}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{pn} \frac{x}{\frac{k}{n} + \frac{x}{n}} \leq \log f_n(x) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{pn} \frac{x}{\frac{k}{n}}$$

$$\begin{aligned} & \text{(最左辺)} \rightarrow \int_1^p \frac{x}{t} dt = x [\log t]_1^p = x \log p \quad (n \rightarrow \infty) \\ & \text{(最右辺)} \rightarrow \int_1^p \frac{x}{t} dt = x [\log t]_1^p = x \log p \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

はさみうちの原理より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log f_n(x) = \log p^x$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = p^x \quad (= f(x))$$

$$\therefore f(x) = p^x \quad (x > 0) \quad \text{(答)}$$

(1) $a = 2^n \cdot l$ (ただし、 l は奇数)と表せる.

(i) b が奇数のとき

$$2a(2a+b) = 2^{n+1} \cdot \underbrace{l(2^{n+1} \cdot l + b)}_{\substack{\uparrow \\ \text{奇数}}}$$

よって、 2^{n+1} の倍数であるが、 2^{n+2} の倍数ではない.

(ii) b が偶数のとき、条件より $b = 4m + 2$ (m は0以上の整数)と表せる.

$$\begin{aligned} a(a+b) &= 2^n \cdot l(2^n \cdot l + 4m + 2) \\ &= 2^{n+1} \cdot \underbrace{l(2^{n-1} \cdot l + 2m + 1)}_{\text{奇数}} \end{aligned}$$

よって、 2^{n+1} の倍数であるが、 2^{n+2} の倍数ではない.

以上(i), (ii)より題意は示された. (証明終)

(2)

(i) b が奇数のとき

$$\frac{a_n(a_n+b)}{2^{2n}} \cdot 10^n = \frac{a_n(a_n+b)}{2^n} \cdot 5^n$$

ここで、 $\underline{a_n = 2^n}$ とおくと、

$$(\text{与式}) = \frac{2^n(2^n+b)}{2^n} \cdot 5^n = \frac{2 \cdot 2^{n-1}(2 \cdot 2^{n-1} + b)}{2^n} \cdot 5^n$$

(1)の(i)より、 $a = 2^{n-1}$ ($n \geq 3$)とおくと、 $2 \cdot 2^{n-1}(2 \cdot 2^{n-1} + b)$ は 2^n の倍数であるが

2^{n+1} の倍数でないから $\frac{2 \cdot 2^{n-1}(2 \cdot 2^{n-1} + b)}{2^n}$ は奇数.

したがって、

$$\frac{a_n(a_n+b)}{2^{2n}} \cdot 10^n = \textcircled{\text{奇}} \cdot 5^n = \text{■} \underbrace{5}_{\text{(一の位)}} \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) b が偶数のとき

$$\frac{a_n(a_n+b)}{2^{2n}} \cdot 10^n = \frac{a_n(a_n+b)}{2^n} \cdot 5^n$$

ここで、 $\underline{a_n = 2^{n-1}}$ とおくと、

$$(\text{与式}) = \frac{2^{n-1}(2^{n-1} + b)}{2^n} \cdot 5^n$$

(1)の(ii)より、 $a = 2^{n-1}$ ($n \geq 3$)とおくと、 $2^{n-1}(2^{n-1} + b)$ は 2^n の倍数であるが

2^{n+1} の倍数でないから $\frac{2^{n-1}(2^{n-1} + b)}{2^n}$ は奇数.

したがって、

$$\frac{a_n(a_n+b)}{2^{2n}} \cdot 10^n = \textcircled{\text{奇}} \cdot 5^n = \text{■} \underbrace{5}_{\text{(一の位)}} \dots\dots \textcircled{2}$$

以上①、②より、 $n \geq 3$ に対して題意をみたす自然数 a_n が存在することが示された. (証明終)

(1) $y = x^2$ を y 軸のまわりに回転してできる曲面 S の方程式は

$$\begin{cases} y = t \quad (t \geq 0) \\ x^2 + z^2 = t \end{cases} \text{より} \quad x^2 + z^2 = y \quad (y \geq 0)$$

実数 s (>0) を用いて

$$\begin{aligned} A(\sqrt{s}, s, 0), B\left(-\frac{1}{2}\sqrt{s}, s, \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{s}\right) \\ C\left(-\frac{1}{2}\sqrt{s}, s, -\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{s}\right) \end{aligned}$$

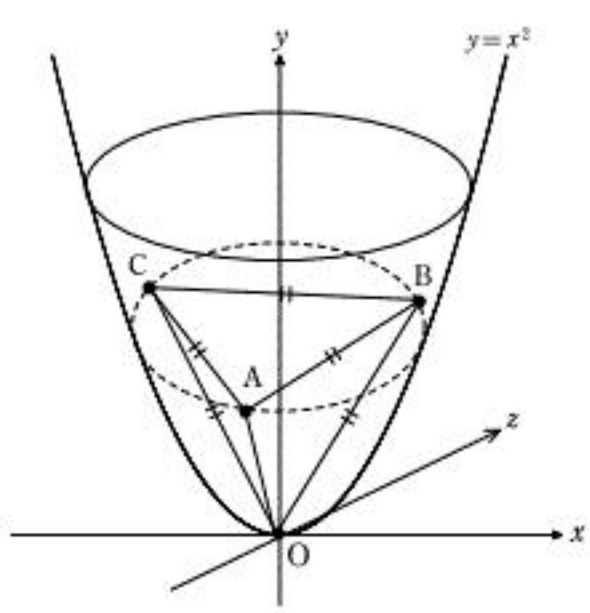
としてもよい.

$$|\overrightarrow{OA}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 \text{より,}$$

$$\begin{aligned} s + s^2 &= \frac{9}{4}s + \frac{3}{4}s \\ \iff s^2 - 2s &= 0 \\ \iff s(s-2) &= 0 \quad \therefore s = 2 \quad (>0) \end{aligned}$$

つまり, $A(\sqrt{2}, 2, 0), B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 2, \frac{\sqrt{6}}{2}\right), C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 2, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

$$\therefore (\text{正四面体の1辺の長さ}) = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{18}{4} + \frac{6}{4}} = \sqrt{6} \quad (\text{答})$$

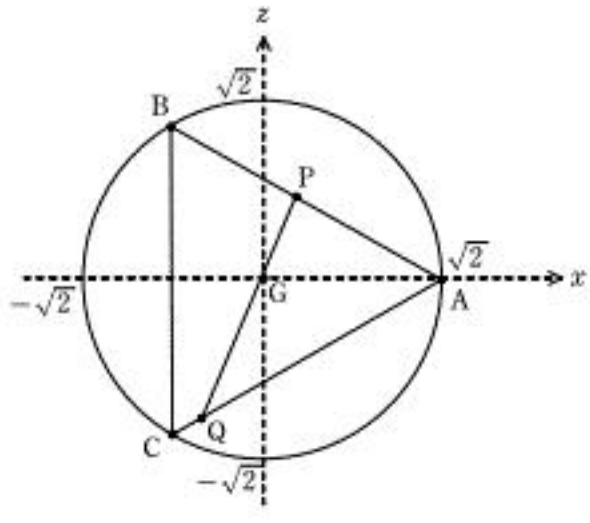


(2) xyz 空間において, 正四面体 $OABC$ は固定し

y 軸を含む平面での切り口を考える $\iff$ (下図の $|\overrightarrow{PQ}|$ の最小を考える.)

$$\begin{cases} \overrightarrow{AP} = \alpha \overrightarrow{AB} & \left(\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1\right) \\ \overrightarrow{AQ} = \beta \overrightarrow{AC} & \left(\frac{1}{2} \leq \beta \leq 1\right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{1}{3\alpha}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{3\beta}\overrightarrow{AQ} \end{aligned}$$



ここで, $\frac{1}{3\alpha} + \frac{1}{3\beta} = 1$

$$\left(\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} &= 3 & \dots\dots \textcircled{1} \\ \alpha + \beta &= 3\alpha\beta \end{aligned} \right)$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PQ}|^2 &= (\sqrt{6}\alpha)^2 + (\sqrt{6}\beta)^2 - 2 \cdot \sqrt{6}\alpha \cdot \sqrt{6}\beta \cdot \cos \frac{\pi}{3} \\ &= 6\alpha^2 + 6\beta^2 - 6\alpha\beta \\ &= 6(\alpha + \beta)^2 - 18\alpha\beta \\ &= 54\alpha^2\beta^2 - 18\alpha\beta \\ &= 54X^2 - 18X \\ &= F(X) \end{aligned}$$

$$\left(\begin{aligned} \textcircled{1} \text{より, } 3\alpha\beta = \alpha + \beta &\geq 2\sqrt{\alpha\beta} \\ \iff 3X &\geq 2\sqrt{X} \\ \therefore X &\geq \frac{4}{9} \end{aligned} \right) \quad (X = \alpha\beta)$$

ここで,

$$F(X) = 54\left(X - \frac{1}{6}\right)^2 - 54 \cdot \frac{1}{36} \geq F\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{24}{9} \quad \therefore |\overrightarrow{PQ}|_{\min.} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$\therefore (\triangle OPQ)_{\min.} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{3} \cdot 2 = \frac{2\sqrt{6}}{3} \quad (\text{答})$$