1

1	2	3	4	5	6	7
(赤)	(白)	(赤)	(白)	(白)	(白)	(白)
or						
(白)	(白)	(赤)	(白)	(赤)	(白)	(白)
or						
(白)	(白)	(赤)	(白)	(白)	(赤)	(白)

(赤)(白) ← $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$　　(白) ← $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

・ $3\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3=\overset{(ア)}{\boxed{\frac{8}{81}}}$　（答）

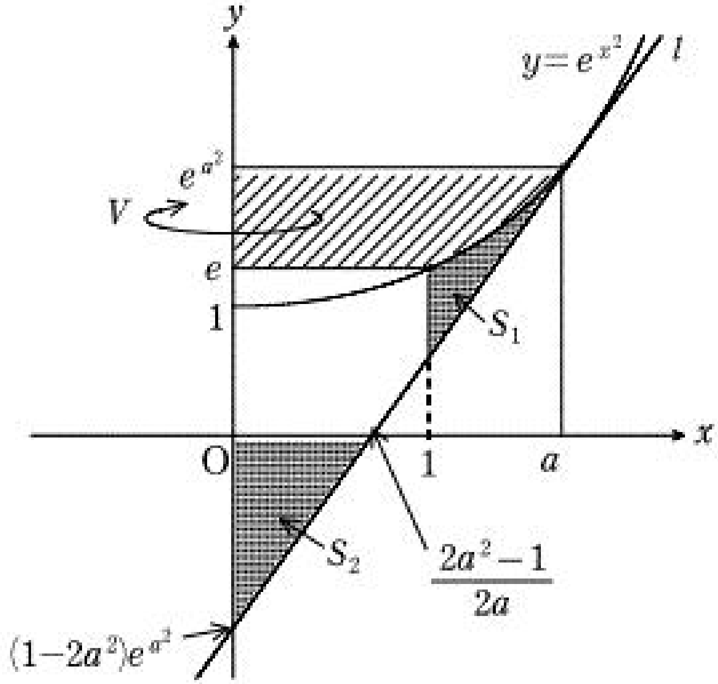
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
(赤)	(白)	(赤)	(白)	(赤)	(白)	(赤)	(白)	(赤)	(白)	$\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{243}$
(赤)	(白)	(赤)	(白)	(赤)	(白)	(赤)	(白)	(白)		$2\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{243}$
		〃				(白)	(赤)	(白)		
(赤)	(白)	(赤)	(白)	(赤)	(白)	(白)	(白)			$4\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{16}{243}$
		⋮								
(赤)	(白)	(白)	(白)	(赤)	(白)	(白)				$3\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{24}{243}$
		⋮								
(白)	(白)	(白)	(白)	(赤)	(白)					$\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{243}$

これらの和をとって，$\frac{1+4+16+24+16}{243}=\overset{(イ)}{\boxed{\frac{61}{243}}}$　（答）

2

(1)　$y=e^{x^2}$ より，$y'=2xe^{x^2}$

点$\left(a,\ e^{a^2}\right)$での接線 l の方程式は，



$$y=2ae^{a^2}(x-a)+e^{a^2}$$
$$\iff\quad y=2ae^{a^2}x+(1-2a^2)e^{a^2}$$

次に，

$$V=\pi\int_e^{e^{a^2}}x^2\,dy$$
$$=\pi\int_e^{e^{a^2}}\log y\,dy$$
$$=\pi\Big[y\log y-y\Big]_e^{e^{a^2}}$$
$$=(a^2-1)e^{a^2}\pi \qquad\text{（答）}$$

(2)

$$S_1=\int_1^a\left\{e^{x^2}-2ae^{a^2}x+(2a^2-1)e^{a^2}\right\}dx$$
$$=\int_1^a e^{x^2}\,dx+(a^3-2a^2+1)e^{a^2} \qquad \cdots\cdots①$$

ここで，$1\leqq x\leqq a$ において，$e\leqq e^{x^2}\leqq e^{a^2}$ より，

$$\int_1^a e\,dx<\int_1^a e^{x^2}\,dx<\int_1^a e^{a^2}\,dx$$
$$\iff\quad e(a-1)<\int_1^a e^{x^2}\,dx<e^{a^2}(a-1) \qquad \cdots\cdots②$$

$$S_2=\frac{1}{2}(2a^2-1)e^{a^2}\cdot\frac{2a^2-1}{2a}=\frac{(2a^2-1)^2e^{a^2}}{4a}\quad(>0)\ \cdots\cdots③$$

①，②，③より，

$$(a^3-2a^2+1)e^{a^2}+e(a-1)<S_1<(a-1)e^{a^2}+(a^3-2a^2+1)e^{a^2}$$
$$\iff\quad \frac{(a^3-2a^2+1)e^{a^2}+e(a-1)}{\dfrac{(2a^2-1)^2e^{a^2}}{4a}}<\frac{S_1}{S_2}<\frac{(a^3-2a^2+a)e^{a^2}}{\dfrac{(2a^2-1)^2e^{a^2}}{4a}}$$

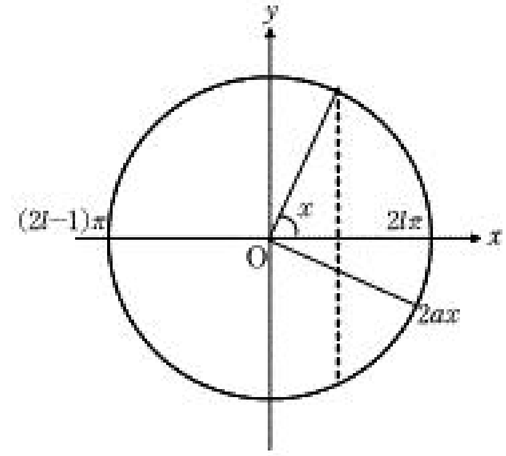
$$\left.\begin{matrix}\text{(最左辺)}\\ \text{(最右辺)}\end{matrix}\right\}\to 1\ (a\to\infty)$$

はさみうちの原理より，

$$\lim_{a\to\infty}\frac{S_1}{S_2}=1 \qquad\text{（答）}$$

3

(1) $0<x\leqq\pi$ より，$0<2ax\leqq 2a\pi$



ここで，$\begin{cases}\cos x\leqq\cos 2ax & \cdots\cdots① \\ \sin 2ax\leqq 0 & \cdots\cdots②\end{cases}$

②より，$(2l-1)\pi\leqq 2ax\leqq 2l\pi$ $(l=1,2,3,\cdots\cdots,a)$

さらに①より，$2l\pi-x\leqq 2ax\leqq 2l\pi$

$$\iff \frac{2l}{2a+1}\pi\leqq x\leqq\frac{l}{a}\pi \quad (l=1,2,3,\cdots\cdots,a)$$

n 個の閉区間の和集合より，$a=n$　　（証明終）

$$x_l=\frac{l}{a}\pi-\frac{2l}{2a+1}\pi=\frac{l\pi}{a(2a+1)} \leftarrow \text{(区間の長さ)} \quad (l=1,2,3,\cdots\cdots,a)$$

ここで，$x_k=\dfrac{k\pi}{a(2a+1)}$ $(k=1,2,3,\cdots\cdots,a)$ とすると，

$$\theta_k=2b(2a+1)x_k=2b(2a+1)\cdot\frac{k\pi}{a(2a+1)}=2k\pi\cdot\frac{b}{a} \quad (k=1,2,3,\cdots\cdots,a)$$

（証明終）

(2) $1\leqq i<j\leqq a$ を満たす自然数 i，j に対し，

$$\begin{cases} ib=a\cdot q_i+r_i \\ jb=a\cdot q_j+r_j \end{cases} \cdots\cdots③$$

と表せる．（ただし，$0\leqq r_i<a, 0\leqq r_j<a$）

ここで，$r_i=r_j$ とすると，③より，

$$(j-i)b=a(q_j-q_i)$$

a と b は互いに素な自然数より，

$$\begin{cases} j-i=am \\ q_j-q_i=bm \end{cases} \quad (m \text{は自然数})$$

と表せるが，これは $1\leqq i<j\leqq a$ に矛盾．　$\therefore\ r_i\neq r_j$　　（証明終）

これより，一般に $kb=a\cdot q_k+r_k$ $(k=1,2,3,\cdots\cdots,a)$ において，

$r_1,r_2,r_3,\cdots\cdots r_a$ の a 個は全て異なる．

$$\{r_1,r_2,r_3,\cdots\cdots r_a\}=\{0,1,2,\cdots\cdots,a-1\} \leftarrow \text{(全体として一致)}$$

よって，

$$\begin{aligned}\theta_k&=2k\pi\cdot\frac{b}{a}\\&=2\pi\cdot\frac{(a\cdot q_k+r_k)}{a}\\&=2\pi q_k+\frac{2\pi r_k}{a}\end{aligned}$$

これより，

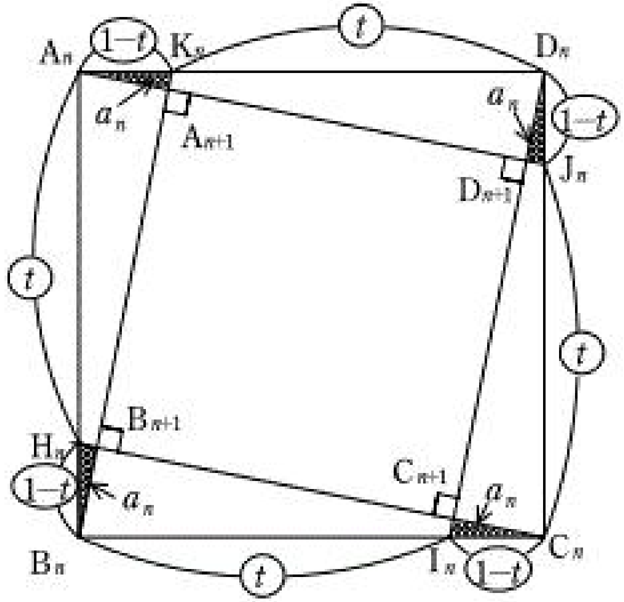
$$\begin{cases}\cos\theta_k=\cos\left(2\pi q_k+\dfrac{2\pi r_k}{a}\right)=\cos\dfrac{2\pi r_k}{a} \\ \sin\theta_k=\sin\left(2\pi q_k+\dfrac{2\pi r_k}{a}\right)=\sin\dfrac{2\pi r_k}{a}\end{cases}$$

$$\text{(偏角)}=0,\frac{2\pi}{a},\frac{4\pi}{a},\frac{6\pi}{a},\cdots\cdots,\frac{2(a-1)\pi}{a}$$

となるので，Z_k $(k=1,2,3,\cdots\cdots,a)$ は単位円を a 等分する分点．　　（証明終）

4

右図のように，正方形$\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$と正方形$\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}$を用いて考える．$\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n = x_n$とおくと，



$\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1} : \mathrm{B}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1} : \mathrm{A}_{n+1}\mathrm{K}_n = 1-t : t : (1-t)^2$より，

$$\mathrm{B}_n\mathrm{K}_n = \frac{(1-t)+t+(1-t)^2}{t}x_{n+1}$$
$$= \frac{t^2-2t+2}{t}x_{n+1}$$

三角形$\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{K}_n$を用いて，

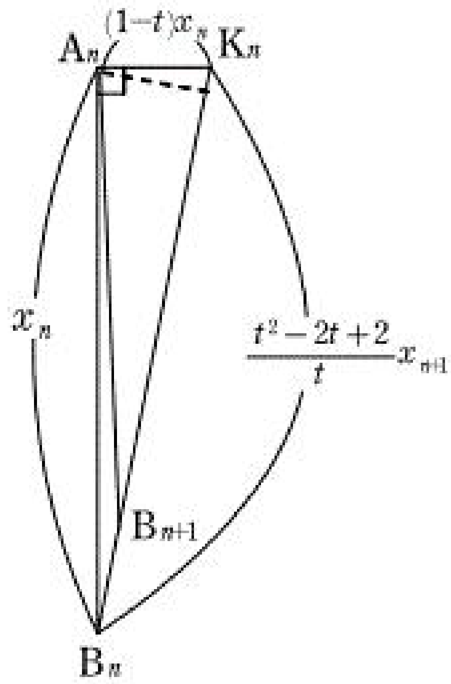
$$\left(\frac{t^2-2t+2}{t}\right)^2 {x_{n+1}}^2 = {x_n}^2 + (1-t)^2{x_n}^2$$

$$\iff \quad {x_{n+1}}^2 = \frac{t^2}{t^2-2t+2}{x_n}^2$$

$x_n > 0,\ t^2-2t+2 > 0$より，

$$x_{n+1} = \frac{t}{\sqrt{t^2-2t+2}}x_n \quad (x_1 = 1)$$

$$\therefore\ x_n = \left(\frac{t}{\sqrt{t^2-2t+2}}\right)^{n-1} \quad (n \geqq 1)$$



これより，

$$a_n = \frac{(1-t)^2}{(1-t)+t+(1-t)^2}\triangle \mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{K}_n$$
$$= \frac{(1-t)^2}{t^2-2t+2}\cdot\frac{1}{2}\cdot x_n\cdot(1-t)x_n$$
$$= \frac{(1-t)^3}{2(t^2-2t+2)}\left(\frac{t^2}{t^2-2t+2}\right)^{n-1}$$

ここで，$0<t<1$より，$0 < \dfrac{t^2}{t^2-2t+2} < 1$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\dfrac{(1-t)^3}{2(t^2-2t+2)}}{1-\dfrac{t^2}{t^2-2t+2}} = \frac{1}{4}(1-t)^2 = \frac{1}{8} \qquad \therefore\ (1-t)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ t = 1-\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (0<t<1) \qquad \text{(答)}$$