

1.

【解答】

(ア)	(イ)
$\frac{59}{162}$	$\frac{25}{729}$

【解説】

1回目の操作で場合分けして考える。

[1] 袋Aから白玉を，袋Bから白玉を取り出すとき

この確率は $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$ である。1回目の操作後，袋Aは白玉3個，赤玉1個，袋Bは白玉0個，赤玉2個となる。このとき，2回目の操作で袋Aの赤玉は1つ増えるから，操作を2回繰り返した後に袋Aに入っている赤玉の個数が1個となることはない。

[2] 袋Aから白玉を，袋Bから赤玉を取り出すとき

この確率は $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ である。1回目の操作後，袋Aは白玉1個，赤玉2個，袋Bは白玉2個，赤玉1個となる。このとき，操作を2回繰り返した後に袋Aに入っている赤玉の個数が1個となるのは，2回目に袋Aから赤玉を，袋Bから白玉を取り出すときで，この確率は $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ である。

[3] 袋Aから赤玉を，袋Bから白玉を取り出すとき

この確率は $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ である。1回目の操作後，袋Aは白玉3個，赤玉0個，袋Bは白玉0個，赤玉3個となる。このとき，2回目は袋Aから白玉を，袋Bから赤玉を取り出すので，操作を2回繰り返した後には必ず袋Aに入っている赤玉の個数は1個となる。

[4] 袋Aから赤玉を，袋Bから赤玉を取り出すとき

この確率は $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$ である。1回目の操作後，袋Aは白玉2個，赤玉2個，袋Bは白玉1個，赤玉1個となる。このとき，操作を2回繰り返した後に袋Aに入っている赤玉の個数が1個となるのは，2回目に袋Aから赤玉を，袋Bから白玉を取り出すときで，この確率は $\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ である。

以上[1]から[4]より，操作を2回繰り返した後に袋Aに入っている赤玉の個数が1個である確率は

$$\frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{4} = \frac{59}{162}$$

である。

操作を3回繰り返した後に袋Aに入っている赤玉の個数が0個となるとき，操作を2回繰り返した後に袋Aに入っている赤玉の個数は0個または1個である。ただし，上で述べたことを考えると，操作を2回繰り返した後に袋Aに入っている赤玉の個数が0個となることはない。上の場合分けで，操作を2回繰り返した後に袋Aに入っている赤玉の個数が1個であるときを考える。

[2] 1回目に袋Aから白玉を，袋Bから赤玉を取り出し，2回目に袋Aから赤玉を，袋Bから白玉を取り出すとき

2回目の操作後，袋Aは白玉2個，赤玉1個，袋Bは白玉1個，赤玉2個となる。このとき，操作を3回繰り返した後に袋Aに入っている赤玉の個数が0個となるのは，3回目に袋Aから赤玉を，袋Bから白玉を取り出すときで，この確率は $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ である。

[3] 1回目に袋Aから赤玉を，袋Bから白玉を取り出すとき

2回目の操作後，袋Aは白玉2個，赤玉1個，袋Bは白玉1個，赤玉2個となる。このとき，操作を3回繰り返した後に袋Aに入っている赤玉の個数が0個となる確率は同じく $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ である。

[4] 1回目に袋Aから赤玉を，袋Bから赤玉を取り出し，2回目に袋Aから赤玉を，袋Bから白玉を取り出すとき

2回目の操作後，袋Aは白玉3個，赤玉1個，袋Bは白玉0個，赤玉2個となる。このとき，3回目の操作で袋Aの赤玉は1つ増えるから，操作を3回繰り返した後に袋Aに入っている赤玉の個数が0個となることはない。

以上[2]から[4]より，操作を3回繰り返した後に袋Aに入っている赤玉の個数が0個である確率は

$$\frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{25}{729}$$

である。

2.

(1)

右側微分係数は,

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(-a+h) - f(-a)}{h} &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{h}{h\sqrt{(-a+h)^2 + 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}\end{aligned}$$

であり, 左側微分係数は,

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(-a+h) - f(-a)}{h} &= \lim_{h \rightarrow -0} \frac{-h}{h\sqrt{(-a+h)^2 + 1}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}\end{aligned}$$

となるから, 両者は一致せず, $f(x)$ は $x = -a$ で微分不可能である。

(答) 微分不可能

(2)

$f(x)$ は定義域全体で連続である。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+a}{\sqrt{x^2+1}} & (-a < x) \\ 0 & (x = -a) \\ -\frac{x+a}{\sqrt{x^2+1}} & (x < -a) \end{cases}$$

であり, $-a < x$ のとき,

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \frac{x+a}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{1-ax}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

であり, $x < -a$ のとき

$$f'(x) = -\frac{1-ax}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

であるから, $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	$-a$	...	$\frac{1}{a}$	...
$f'(x)$	-		+	0	-
$f(x)$		0		$f\left(\frac{1}{a}\right)$	

ただし, $a > 0$ より $-a < 0 < \frac{1}{a}$ であり,

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{\frac{1}{a} + a}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + 1}} = \sqrt{a^2 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{a}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{a}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 1$$

である。したがって, $f(x)$ は $x = \frac{1}{a}$ で最大値をとり, これが $\sqrt{2}$ となる定数 a の値は

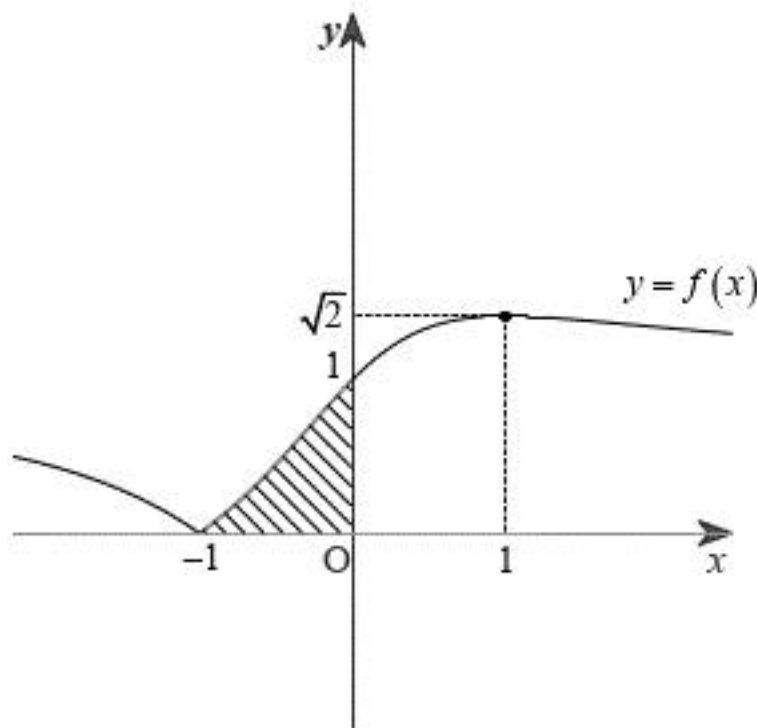
$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 + 1} &= \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow a^2 + 1 &= 2 \\ \therefore a &= 1 \quad (\because a > 0)\end{aligned}$$

である。

(答) $a = 1$

(3)

$a = 1$ のとき, $y = f(x)$ のグラフは以下のようになり, $y = f(x)$ のグラフと x 軸および y 軸で囲まれた部分は下図の斜線部である。



斜線部を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V は,

$$\begin{aligned}V &= \int_{-1}^0 \pi \{f(x)\}^2 dx \\ &= \pi \int_{-1}^0 \frac{(x+1)^2}{x^2+1} dx \\ &= \pi \int_{-1}^0 \left(1 + \frac{2x}{x^2+1}\right) dx \\ &= \pi \left[x + \log(x^2+1) \right]_{-1}^0 \\ &= (1 - \log 2) \pi\end{aligned}$$

である。

(答) $V = (1 - \log 2) \pi$

3.

(1)

k は m のすべての正の約数の個数であるから自然数である。

[1] $k=1$ のとき

$m=1$ となるから 3 以上の奇数であることを満たさない。

[2] $k=2$ のとき

m は素数となるから条件(i)を満たさない。

[3] k が 5 以上の整数のとき

m は奇数であるから、すべての正の約数も奇数である。隣り合う奇数の差は 2 であるから、 $a_4 - a_2 = (a_4 - a_3) + (a_3 - a_2) \geq 2 + 2 = 4$ となるが、これは条件(ii)で $i=2, j=4$ としたときの、 $a_4 - a_2 \leq 3$ を満たさない。

以上、[1], [2], [3] より、 k は 3 または 4 である。

(証明終)

[4] $k=3$ のとき

m は素数の 2 乗である。この素数が a_2 であるから、 $m = a_2^2$ である。

[5] $k=4$ のとき

m は異なる 2 つの素数の積である。小さい方が a_2 であり、大きい方が a_3 である。条件(ii)より、 $a_3 - a_2 \leq 3$ であり、 a_2, a_3 はともに奇数であるから、 $a_3 = a_2 + 2$ とわかり、 $m = a_2(a_2 + 2)$ となる。

(答) $m = a_2^2$ ($k=3$ のとき), $a_2(a_2 + 2)$ ($k=4$ のとき)

(2)

$k=3$ であるから、 $m = a_2^2$ である。二項定理より、

$$\begin{aligned} (a_2 n + 1)^{a_2} - 1 &= \sum_{i=0}^{a_2} {}_{a_2}C_i (a_2 n)^i - 1 \\ &= \sum_{i=2}^{a_2} (a_2 n)^2 {}_{a_2}C_i (a_2 n)^{i-2} + a_2 \cdot a_2 n + 1 - 1 \\ &= a_2^2 \left\{ \sum_{i=2}^{a_2} n^2 {}_{a_2}C_i (a_2 n)^{i-2} + n \right\} \end{aligned}$$

となり、中括弧の中身は整数であるから、 $(a_2 n + 1)^{a_2} - 1$ は $m = a_2^2$ の倍数である。

(証明終)

4.

(1)

点 z は原点を中心とする半径1の円周上を動くから、実数 θ を用いて $z = \cos \theta + i \sin \theta$ と表せる。このとき、

$$\begin{aligned} w &= z + \frac{2}{z} \\ &= (\cos \theta + i \sin \theta) + 2 \{ \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) \} \\ &= 3 \cos \theta - i \sin \theta \end{aligned}$$

であるから、実部と虚部をそれぞれ比較して

$$u = 3 \cos \theta, v = -\sin \theta$$

となる。 $\cos \theta = \frac{u}{3}$, $\sin \theta = -v$ であり、 θ はすべての実数をとるから、 u と v の間に成り立つ関

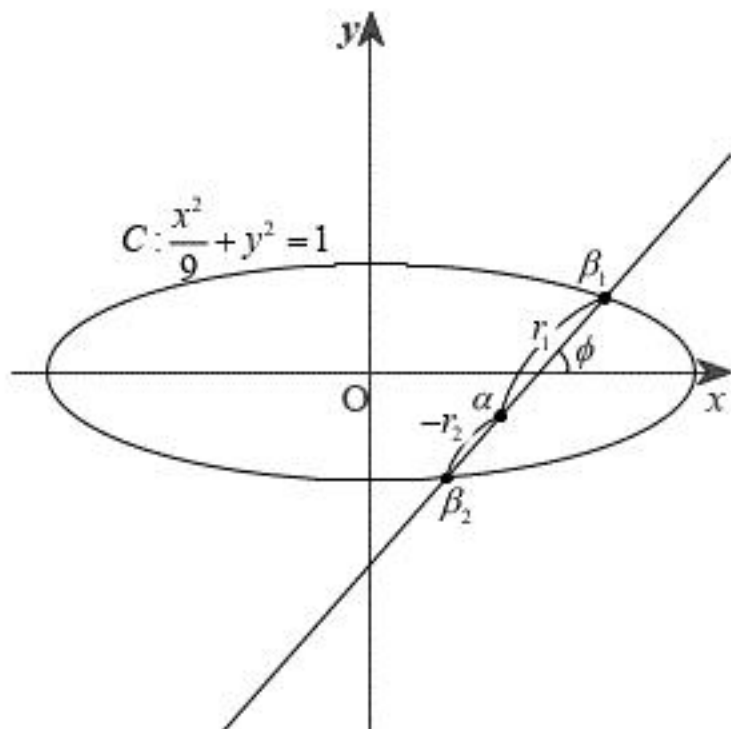
係式は $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ より、

$$\left(\frac{u}{3}\right)^2 + (-v)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{u^2}{9} + v^2 = 1$$

である。

$$(\text{答}) \frac{u^2}{9} + v^2 = 1$$

(2)



以降、 xy 平面として考える。点 w の描く図形 C は楕円 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ であり、その内部 (ただし、

境界線は含まない) は $\frac{x^2}{9} + y^2 < 1$ で表される。直線 ℓ の方向ベクトルを $(\cos \phi, \sin \phi)$ 、また、

$\alpha = a + ib$ (ϕ, a, b は実数) とおくと、 $\frac{a^2}{9} + b^2 < 1$ であり、直線 ℓ 上の点の座標は、点 $\alpha(a, b)$ から

の距離 r を用いて、 $(a + r \cos \phi, b + r \sin \phi)$ と表せる。これが $C: \frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 上にあるとき、

$$\begin{aligned} \frac{(a + r \cos \phi)^2}{9} + (b + r \sin \phi)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow (a^2 + 2ar \cos \phi + r^2 \cos^2 \phi) + 9(b^2 + 2br \sin \phi + r^2 \sin^2 \phi) - 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\cos^2 \phi + 9 \sin^2 \phi) r^2 + (2a \cos \phi + 18b \sin \phi) r + (a^2 + 9b^2 - 9) &= 0 \end{aligned}$$

を満たす。ここで、 $\cos^2 \phi + 9 \sin^2 \phi > 0$, $a^2 + 9b^2 - 9 < 0$ より、この r の2次方程式は必ず2つの実数解を持ち、一方は正、他方は負である。 β_1 と α の距離を $r_1 (> 0)$ 、 β_2 と α の距離を $-r_2 (> 0)$ とおくと、解と係数の関係より、

$$\begin{aligned} |\beta_1 - \alpha| \cdot |\beta_2 - \alpha| &= r_1 \cdot (-r_2) \\ &= \frac{-(a^2 + 9b^2 - 9)}{\cos^2 \phi + 9 \sin^2 \phi} \end{aligned}$$

となる。点 α は固定されているから分子は正の定数であり、分母の

$$\cos^2 \phi + 9 \sin^2 \phi = 1 + 8 \sin^2 \phi$$

は $\sin \phi = 0$ のとき最小値をとり、このとき $|\beta_1 - \alpha| \cdot |\beta_2 - \alpha|$ は最大となる。方向ベクトルは $(\pm 1, 0)$ であるから、このとき直線 ℓ は x 軸、すなわち複素数平面上で実軸に平行となる。

(答) 実軸に平行な直線するとき