

1.

【解答】

(ア)	(イ)
$\frac{14}{125}$	$\frac{18}{625}$

【解説】

(r_1, r_2, r_3, r_4) の組の総数は全体で $5^4 = 625$ (通り) あり、これらはすべて同様に確からしい。

(ア)

$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 \leq 8$ となる (r_1, r_2, r_3, r_4) の組の総数は 8 つの玉の隙間と右端の 8 つの間から 4 つの仕切りを入れるところを選ぶ選び方の総数に等しい。このとき、どの r_i ($i=1, 2, 3, 4$) も 6 以上にならない。この選び方の総数は、

$${}_8C_4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70 \text{ (通り)}$$

であるから、確率は

$$\frac{70}{625} = \frac{14}{125}$$

である。

(イ)

$0 < \frac{4}{r_1 r_2}, 0 < \frac{2}{r_3 r_4}$ より、 $0 < \frac{4}{r_1 r_2} < 1, 0 < \frac{2}{r_3 r_4} < 1$ であるから、 $4 < r_1 r_2, 2 < r_3 r_4$ が必要となる。

$$\frac{4}{r_1 r_2} + \frac{2}{r_3 r_4} = 1$$

$$\Leftrightarrow 4r_3 r_4 + 2r_1 r_2 = r_1 r_2 r_3 r_4$$

$$\therefore (r_1 r_2 - 4)(r_3 r_4 - 2) = 8$$

であるから、 $(r_1 r_2, r_3 r_4)$ の組は

$$(r_1 r_2 - 4, r_3 r_4 - 2) = (1, 8), (2, 4), (4, 2), (8, 1)$$

$$\therefore (r_1 r_2, r_3 r_4) = (5, 10), (6, 6), (8, 4), (12, 3)$$

となる。 (r_1, r_2, r_3, r_4) の組は

$$(r_1, r_2, r_3, r_4) = (1, 5, 2, 5), (1, 5, 5, 2), (5, 1, 2, 5), (5, 1, 5, 2),$$

$$(2, 3, 2, 3), (2, 3, 3, 2), (3, 2, 2, 3), (3, 2, 3, 2),$$

$$(2, 4, 1, 4), (2, 4, 2, 2), (2, 4, 4, 1), (4, 2, 1, 4), (4, 2, 2, 2), (4, 2, 4, 1),$$

$$(3, 4, 1, 3), (3, 4, 3, 1), (4, 3, 1, 3), (4, 3, 3, 1)$$

の 18 通りであるから、確率は $\frac{18}{625}$ である。

2.

(1)

$$f(x) = x + \frac{1}{n} \int_0^x f(t) dt \quad \cdots \textcircled{1}$$

を微分することで、

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{n} f(x)$$

を得る。 $h(x) = e^{-\frac{x}{n}} f(x)$ とおくと、

$$\begin{aligned} h'(x) &= -\frac{1}{n} e^{-\frac{x}{n}} f(x) + e^{-\frac{x}{n}} f'(x) \\ &= e^{-\frac{x}{n}} \left(-\frac{1}{n} f(x) + 1 + \frac{1}{n} f(x) \right) \\ &= e^{-\frac{x}{n}} \end{aligned}$$

である。この両辺を積分して、

$$\begin{aligned} h(x) &= \int e^{-\frac{x}{n}} dx \\ &= -ne^{-\frac{x}{n}} + C \end{aligned}$$

となる(ただし C は積分定数)。ここで、 $\textcircled{1}$ に $x=0$ を代入すると、 $f(0)=0$ となるから、 $h(0)=0$ である。したがって、 $C=n$ であり、

$$h(x) = -ne^{-\frac{x}{n}} + n$$

となる。

$$(\text{答}) \quad h'(x) = e^{-\frac{x}{n}}, \quad h(x) = -ne^{-\frac{x}{n}} + n$$

(2)

(1)より、

$$f(x) = e^{\frac{x}{n}} h(x) = ne^{\frac{x}{n}} - n$$

である。 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点の x 座標を k とおくと、共有点における2つの曲線の接線が直交する条件は、接線の傾きの積が -1 となることであるから、

$$\begin{aligned} f'(k) \cdot g'(k) &= -1 \\ \Leftrightarrow e^{\frac{k}{n}} \cdot \left(-\frac{a}{n} e^{-\frac{k}{n}} \right) &= -1 \\ \therefore a &= n \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = n$$

(3)

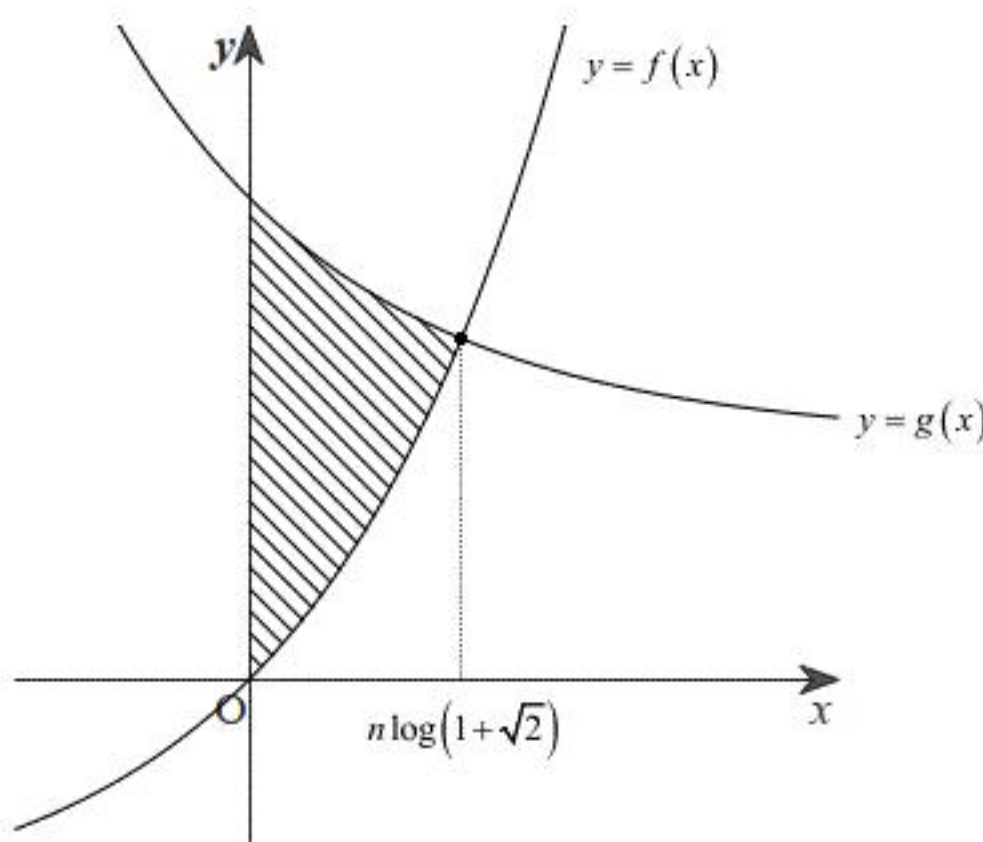
2つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点の x 座標 k は、

$$f(k) = g(k) \Leftrightarrow ne^{\frac{k}{n}} - n = ne^{-\frac{k}{n}} + n$$

を満たす。 $t = e^{\frac{k}{n}}$ とおくと、 $t > 0$ であるから、

$$\begin{aligned} ne^{\frac{k}{n}} - n &= ne^{-\frac{k}{n}} + n \\ \Leftrightarrow t - 1 &= \frac{1}{t} + 1 \\ \Leftrightarrow t^2 - 2t - 1 &= 0 \quad (\because t \neq 0) \\ \Leftrightarrow t &= 1 + \sqrt{2} \quad (\because t > 0) \\ \therefore k &= n \log(1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

となり、 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ は1点を共有している。2つの曲線 $y=f(x)$ 、 $y=g(x)$ と y 軸で囲まれた部分は下図の斜線部である。



その面積は、

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^{n \log(1+\sqrt{2})} \{g(x) - f(x)\} dx \\ &= \int_0^{n \log(1+\sqrt{2})} \left\{ ne^{-\frac{x}{n}} + n - \left(ne^{\frac{x}{n}} - n \right) \right\} dx \\ &= n \int_0^{n \log(1+\sqrt{2})} \left(-e^{\frac{x}{n}} + e^{-\frac{x}{n}} + 2 \right) dx \\ &= n \left[-ne^{\frac{x}{n}} - ne^{-\frac{x}{n}} + 2x \right]_0^{n \log(1+\sqrt{2})} \\ &= n \left[\left\{ -n(1+\sqrt{2}) - n \cdot \frac{1}{1+\sqrt{2}} + 2n \log(1+\sqrt{2}) \right\} - (-n-n) \right] \\ &= n^2 \left\{ 2 \log(1+\sqrt{2}) - (1+\sqrt{2}) - (\sqrt{2}-1) + 2 \right\} \\ &= 2 \left\{ \log(1+\sqrt{2}) + 1 - \sqrt{2} \right\} n^2 \end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 + \cdots + S_n &= \sum_{i=1}^n 2 \left\{ \log(1+\sqrt{2}) + 1 - \sqrt{2} \right\} i^2 \\ &= 2 \left\{ \log(1+\sqrt{2}) + 1 - \sqrt{2} \right\} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \end{aligned}$$

より、求める極限值は、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n^3} &= 2 \left\{ \log(1+\sqrt{2}) + 1 - \sqrt{2} \right\} \cdot \frac{1}{6} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) \right\} \\ &= \frac{2}{3} \left\{ \log(1+\sqrt{2}) + 1 - \sqrt{2} \right\} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{2}{3} \left\{ \log(1+\sqrt{2}) + 1 - \sqrt{2} \right\}$$

3.

背理法で証明する。すなわち、線分 OP の長さが有理数であるとして矛盾を導く。

r_1, r_2, s_1, s_2, p, q を自然数として、 $r = \frac{r_2}{r_1}, s = \frac{s_2}{s_1}$, 線分 OP の長さを $\frac{q}{p}$ とおくと、

$$\begin{aligned}\sqrt{(\sqrt{2}r)^2 + (\sqrt{3}s)^2} &= \frac{q}{p} \\ \Leftrightarrow 2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 + 3\left(\frac{s_2}{s_1}\right)^2 &= \left(\frac{q}{p}\right)^2 \\ \Leftrightarrow 2(ps_1r_2)^2 + 3(pr_1s_2)^2 &= (qr_1s_1)^2\end{aligned}$$

を満たす。よって、 $x = ps_1r_2, y = pr_1s_2, z = qr_1s_1$ とおくと、 $2x^2 + 3y^2 = z^2$ となるため、 $2x^2 + 3y^2 = z^2$ を満たす自然数の組 (x, y, z) が存在する。ここで、平方数を 3 で割った余りを考えると、 x が 3 の倍数のとき、 x^2 も 3 の倍数であり、 x が 3 の倍数でないとき、 x^2 を 3 で割ると 1 余る。 x が 3 の倍数でないと仮定すると、 z^2 を 3 で割った余りは 2 となるが、このような平方数は存在しないので不適である。したがって、 x は 3 の倍数であり、このとき z も 3 の倍数である。 $x = 3x', z = 3z'$ (x', z' は自然数) とおくと、

$$\begin{aligned}2(3x')^2 + 3y^2 &= (3z')^2 \\ \Leftrightarrow y^2 &= 3z'^2 - 6x'^2\end{aligned}$$

となり、 y^2 は 3 の倍数であるから、 y も 3 の倍数である。 $y = 3y'$ (y' は自然数) とおくと、

$$2x'^2 + 3y'^2 = z'^2$$

を満たすから、 $\left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{z}{3}\right)$ も自然数の組であり、 $2\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{y}{3}\right)^2 = \left(\frac{z}{3}\right)^2$ を満たす。よって、自

然数 n に対し $(x_n, y_n, z_n) = \left(\frac{x}{3^n}, \frac{y}{3^n}, \frac{z}{3^n}\right)$ と定めると、帰納的に $(x, y, z) = (x_n, y_n, z_n)$ は

$2x^2 + 3y^2 = z^2$ を満たす自然数の組である。一方、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ であるため、ある自然数 N が存

在し、 $0 < x_N < 1$ となる。これは x_N が自然数であることに矛盾する。ゆえに仮定は誤りであり、線分 OP の長さは無理数となる。

(証明終)

4.

(1)

$$\overrightarrow{AP} = (r \cos \theta, r \sin \theta, -1), \overrightarrow{BQ} = \left(\frac{1}{r} \cos \theta, \frac{1}{r} \sin \theta, 1 \right) \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BQ} &= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。このことから直線 AP, BQ は点 R で直交する。よって、点 R は線分 AB を直径とする球面上にあることから

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

という関係式を得る。

$$(\text{答}) \ a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

(2)

$t = r \sin \theta$ とおく。 r, θ が $r > 0, -\pi \leq \theta < \pi, r \cos \theta = \frac{1}{2}$ を満たしながら変化するとき、

$P\left(\frac{1}{2}, t, 0\right)$ であり、 t は実数全体を変化する。また、(1)より、点 R は直線 AP と球面

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ の交点のうち A でない方である。このとき、 $k \neq 0$ とする実数 k を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OR} &= \overrightarrow{OA} + k \overrightarrow{AP} \\ &= \left(\frac{k}{2}, kt, 1-k \right) \end{aligned}$$

となる。点 R は $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上の点より $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ に代入して、

$$\begin{aligned} \left(\frac{k}{2} \right)^2 + (kt)^2 + (1-k)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow k^2 + 4k^2 t^2 + 4k^2 - 8k &= 0 \\ \therefore k &= \frac{8}{4t^2 + 5} \quad (\because k \neq 0) \end{aligned}$$

となる。よって、 $R\left(\frac{4}{4t^2 + 5}, \frac{8t}{4t^2 + 5}, 1 - \frac{8}{4t^2 + 5}\right)$ であり、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{OR} &= 4 \cdot \frac{4}{4t^2 + 5} + \frac{8t}{4t^2 + 5} + 1 - \frac{8}{4t^2 + 5} \\ &= 1 + 8 \cdot \frac{t+1}{4t^2 + 5} \end{aligned}$$

である。ここで、最大値を考えることから $t > -1$ としてよい。このとき、

$$\begin{aligned} \frac{t+1}{4t^2 + 5} &= \frac{t+1}{4\{(t+1)-1\}^2 + 5} \\ &= \frac{t+1}{4(t+1)^2 - 8(t+1) + 9} \\ &= \frac{1}{4(t+1) + \frac{9}{t+1} - 8} \end{aligned}$$

となる。 $4(t+1) > 0, \frac{9}{t+1} > 0$ より相加平均・相乗平均の関係式から

$$4(t+1) + \frac{9}{t+1} - 8 \geq 2\sqrt{4(t+1) \cdot \frac{9}{t+1}} - 8 = 4$$

となる。等号成立は

$$\begin{aligned} 4(t+1) &= \frac{9}{t+1} \\ \Leftrightarrow (t+1)^2 &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ \therefore t &= \frac{1}{2} \quad (\because t > -1) \end{aligned}$$

のときである。したがって、

$$1 + 8 \cdot \frac{t+1}{4t^2 + 5} \leq 1 + 8 \cdot \frac{1}{4} = 3$$

となり、 $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{OR} = 3$ が最大値となる。このとき、 $t = \frac{1}{2}$ を代入して、 $R\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ となる。

$$(\text{答}) \text{ 最大値: } 3, (a, b, c) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$